

MODELOS MATEMÁTICOS E LINGUAGEM DE ALUNOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo
emersontortola@utfpr.edu.br

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina
lourdes@uel.br

Resumo:

Considerando que diferentes modelos matemáticos podem ser produzidos em uma atividade de modelagem e que essa pluralidade pode ser associada aos conhecimentos matemáticos dos modeladores e aos usos que fazem da linguagem, investigamos neste artigo quais modelos matemáticos são produzidos por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os dados coletados por meio de registros escritos, imagens e gravações em áudio foram analisados conforme orientações metodológicas da análise de conteúdo e sinalizam que, em geral, as estruturas matemáticas utilizadas pelos alunos para expressar seus modelos são constituídas por números e operações, gráficos, desenhos e textos, e que o envolvimento com a matemática ao longo dos anos possibilita a ampliação dos usos de sua linguagem, em conformidade com as regras estabelecidas. A modelagem matemática configura-se como um meio de proporcionar essa ampliação.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Modelos; Linguagem; Ensino Fundamental.

1. Introdução

A produção de modelos matemáticos é um aspecto que chama atenção daqueles que se envolvem com modelagem matemática. Esse procedimento envolve preocupações como: Que variáveis da situação devem ser consideradas? Que hipóteses e simplificações podem ser realizadas para a abordagem matemática da situação-problema? Que matemática utilizar para resolver o problema? Como empregar a linguagem matemática para expressar o modelo? Questões como essas permeiam a prática do fazer modelagem matemática e os modeladores as mantêm sempre em mente, na busca por expressar modelos para as situações a que se propõem investigar.

Levando em consideração essas questões, pode se apresentar uma multiplicidade de caminhos para interpretar e analisar situações-problema provenientes do mundo real. É nesse contexto que Almeida, Sousa e Tortola (2015, p. 3) afirmam que “a modelagem matemática viabiliza uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de

fenômenos não matemáticos com o apoio da matemática”. Idiossincrática, pois os rumos e caminhos que a atividade pode tomar não são definidos de antemão, mas configuram-se no decorrer da atividade, conforme os sujeitos envolvidos e de acordo com o contexto em investigação.

Há na literatura diferentes modos de representar situações-problema por meio da matemática e de sua linguagem. Bassanezi (2002), por exemplo, apresenta vários modelos matemáticos que podem ser utilizados para interpretar diferentes situações, envolvendo conteúdos como funções, geometria, equações diferenciais, estatística etc. O autor apresenta também situações-problema com diferentes possibilidades de abordagem matemática.

Ferruzzi et al. (2010) também sinalizam a possibilidade de encaminhamentos diferentes para uma atividade de modelagem matemática em diferentes níveis de escolaridade. Os autores sugerem encaminhamentos para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior para o problema de determinar a área da fachada de um santuário que seria pintado, apontando diferentes maneiras de usar a matemática para resolver o problema.

É sob essa perspectiva que encaminhamos esta pesquisa, focando, contudo, em diferentes séries, mas de um mesmo nível de escolaridade, no caso, os anos iniciais do Ensino Fundamental, e, nesse contexto, orientamo-nos pela questão: *Que modelos matemáticos são produzidos por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma atividade de modelagem matemática e que uso fazem da linguagem matemática nesse contexto?*

Para investigar essa questão apresentamos algumas considerações sobre modelagem matemática e linguagem sob uma perspectiva wittgensteiniana que constituem nosso quadro teórico, e analisamos uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por alunos de 5 turmas, 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental.

2. Modelagem Matemática: a arte de produzir modelos matemáticos

Modelagem matemática, em geral, é associada a dois componentes, a problemática, proveniente de um fenômeno do mundo real, e o modelo matemático, estrutura matemática utilizada para representar esse fenômeno. A atividade de modelagem ocorre quando uma abordagem matemática é empreendida de modo que o modelo matemático forneça uma resposta para a problemática em questão.

Nesse sentido, modelagem matemática pode ser entendida como “um procedimento criativo e interpretativo que faz uso ou estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno, indicando uma possível solução para um problema associado a este fenômeno” (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015). Envolve, pois, o uso de linguagem matemática para matematizar a situação e construir tal estrutura. E, mediante a possibilidade de diferentes rumos que a atividade pode tomar, requer do modelador criatividade para articular seus conhecimentos e resolver o problema. É sob essa perspectiva que Bassanezi (2002, p. 16) se refere à modelagem matemática como uma arte, a “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”, uma arte que abarca definir que conteúdos matemáticos utilizar e como usar a linguagem para produzir modelos matemáticos que expressem a situação.

Segundo Doerr e English (2003) um modelo matemático pode ser entendido como um sistema de elementos, operações, relações e regras, e pode ser utilizado para descrever, explicar ou prever o comportamento de algum outro sistema conhecido, associado a uma situação proveniente do mundo real. Diz-se que o modelo matemático provê meios para descrever, explicar e prever o comportamento de fenômenos, por meio de uma linguagem que pode incluir desde a escrita de símbolos, até o uso de diagramas e gráficos (DOERR; ENGLISH, 2003). Nesse sentido, pode-se dizer que modelos matemáticos só se constituem como tal na linguagem e é por meio dela que lidamos com os conteúdos matemáticos para resolver problemas.

3. Modelos Matemáticos e Linguagem

Assim como atuar em uma peça de teatro, proferir uma palestra ou contar uma piada, fazer modelagem matemática configura-se também como uma atividade que envolve regras e modos de agir característicos, bem como uma maneira específica de se expressar dentro desse contexto e de usar a linguagem. A esses diferentes usos da linguagem e às atividades com as quais ela vem entrelaçada, Wittgenstein (2012, § 7) denominou “jogos de linguagem”. A ideia de jogos de linguagem centraliza a filosofia da linguagem de Wittgenstein¹ e marca o modo

¹ Ludwig Wittgenstein foi um filósofo austríaco, que dedicou seus estudos ao entendimento da linguagem. Esses estudos, de modo geral, dividem-se em dois momentos: o primeiro no qual ele busca uma essência lógica, metafísica para a linguagem e o segundo, contrapondo-se ao primeiro, ele procura entender a linguagem em seu funcionamento, a partir de seus usos, a partir dos ‘jogos de linguagem’.

como ela é entendida. Olhar para a linguagem no contexto dessa filosofia em busca de um significado é uma atitude de busca por compreender seus usos, seu ‘funcionamento’. É na linguagem que as coisas são significadas (WITTGENSTEIN, 2012), isto é, o significado não está na linguagem ou na pessoa que procura um significado, mas na totalidade que envolve uma determinada atividade, o significado está na forma como a linguagem é empregada, levando em consideração os contextos, crenças, hábitos, culturas, valores, enfim, a “forma de vida” dos sujeitos envolvidos (WITTGENSTEIN, 2012, § 23).

Para participar de um jogo de linguagem, como explica Izmirli (2013, p. 7), “deve-se aceitar certas regras para que se possa usar termos dentro de um discurso social. O significado é, por conseguinte, estabelecido a partir de padrões sociais. As regras e a forma do jogo pode mudar, mas são aprendidas através da participação no jogo”.

Desta forma, se o sujeito insere-se no jogo de linguagem referente ao fazer modelagem matemática, ele precisa agir de acordo com os axiomas, teoremas e convenções matemáticas. Ao usar uma linguagem, e aqui nos referimos à linguagem matemática, é preciso concordar não somente com as definições, mas também nos julgamentos; não concordar nas opiniões, mas na forma de vida (WITTGENSTEIN, 2012; IZMIRLI, 2013).

Essas colocações de Wittgenstein, que sugerem que só se aprende a agir conforme um jogo de linguagem participando dele, vêm ao encontro da afirmação de Bassanezi (2002) que só se aprende a fazer modelagem matemática fazendo, e, fundamentados nessas ideias e nos objetivos para o ensino de matemática elencados por documentos curriculares nacionais, argumentamos a favor da implementação da modelagem matemática já nos primeiros anos escolares, a fim de que os alunos possam inserir-se nesse jogo de linguagem e participar dessa forma de vida, aprendendo a interpretar e analisar situações-problema provenientes do mundo real, a produzir modelos matemáticos e a utilizar esses modelos para solucionar problemas que se encontram no mundo ao nosso redor.

4. Contexto da Pesquisa e Aspectos Metodológicos

A pesquisa foi desenvolvida em consonância com as orientações metodológicas da análise de conteúdo, proposta por Bardin (2004). Trata-se de uma abordagem qualitativa, cujos dados foram obtidos por meio de observações diretas e contou com a participação do

pesquisador, primeiro autor do artigo, como professor. As professoras regentes das turmas foram convidadas a participar das aulas e tiveram liberdade para participar das discussões.

Os dados foram coletados no segundo semestre de 2015 por meio das produções escritas dos alunos, bem como de gravações em áudio, imagens e diário de campo do pesquisador durante uma atividade de modelagem matemática. A atividade que analisamos foi desenvolvida por alunos de 5 turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental, 1º ao 5º ano, em uma escola pública e municipal do noroeste do Paraná. Foi a primeira atividade de modelagem desenvolvida pelos 112 alunos participantes e teve como tema ‘crescimento das unhas’. O Quadro 1 apresenta algumas informações disponibilizadas aos alunos.

Quadro 1: Informações sobre o crescimento das unhas

VOCÊ SABIA? AS UNHAS NÃO PARAM DE CRESCER. A GENTE CORTA AS UNHAS E ALGUNS DIAS DEPOIS TEM QUE CORTAR DE NOVO, PORQUE ELAS JÁ ESTÃO GRANDES!


UNHAS GIGANTES

VOCÊ SABE QUANTO AS UNHAS CRESCEM POR DIA? ELAS CRESCEM 0,1 MILÍMETRO POR DIA, A NÃO SER QUE VOCÊ SEJA DAQUELAS PESSOAS QUE TÊM O HÁBITO MUITO FEIO DE ROER AS UNHAS...

AGORA VAMOS FAZER UMAS CONTINHAS PARA DEIXAR SUA MÃE DE CABELO EM PÉ: SE VOCÊ DEIXASSE CRESCER AS UNHAS DURANTE CINCO ANOS, QUANTO ELAS MEDIRIAM? SE VOCÊ MULTIPLICAR 0,1 MILÍMETRO POR 30 DIAS, SABERÁ QUANTOS MILÍMETROS SUAS UNHAS CRESCEM POR MÊS: 3 MILÍMETROS.

FONTE: [HTTP://WWW.CANALKIDS.COM.BR/CULTURA/MATEMATICA/CURIOSIDADES.HTM](http://www.canalkids.com.br/cultura/matematica/curiosidades.htm)

*QUANTO CRESCEM SUAS UNHAS AO LONGO DOS MESES, CASO VOCÊ NÃO AS CORTE?
DE QUANTO EM QUANTO TEMPO VOCÊ DEVE CORTAR SUAS UNHAS PARA EVITAR
PROBLEMAS DE SAÚDE?*



Fonte: Dos autores.

Além dessas informações, os alunos também assistiram a um vídeo² que aborda a importância de cortar as unhas. Após assistirem ao vídeo, o professor conduziu as discussões por meio de uma apresentação de slides, com algumas informações, explicando questões que ficaram com dúvidas, mas, sobretudo, ouvindo o que os alunos tinham a dizer a respeito do assunto. De modo geral, as colocações dos alunos revelaram interesse pelo tema. Um ponto interessante é que além de ser uma questão que diz respeito a todos, o crescimento das unhas é um tema geralmente discutido nesse contexto escolar, associado à questão da higiene do corpo.

² O vídeo tem aproximadamente 7 minutos e está disponível no canal do Quintal da Cultura no YouTube, no endereço: <https://www.youtube.com/watch?v=FSToendzvjs>.

O quadro 1 apresenta também duas questões que configuram a problemática proposta para investigação: Quanto crescem suas unhas ao longo dos meses, caso você não as corte? De quanto em quanto tempo você deve cortar suas unhas para evitar problemas de saúde?

Duas variáveis estão envolvidas nessa situação, o ‘crescimento das unhas’ em milímetros (mm) e o ‘tempo’ em meses, e para responder a essas questões os alunos tiveram que simplificar a situação e assumiram como hipótese H_1 : O crescimento das unhas é uniforme, ou seja, as unhas das mãos crescem por mês 3 mm e as unhas dos pés crescem por mês 1 mm. A partir dessa hipótese, os alunos conseguiram estruturar seus modelos matemáticos, que descrevem o crescimento das unhas por um período de tempo determinado por eles, mas conscientes de que na situação real, com o passar do tempo as unhas continuam a crescer ininterruptamente, caso não sejam cortadas ou quebradas.

São esses modelos matemáticos, produzidos pelos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, nas cinco turmas, que trazemos para análise e discussão.

5. Modelos Matemáticos para o Crescimento das Unhas

Conforme sugere Wittgenstein (2012, § 5), considerar a existência de uma linguagem ideal, sob uma concepção referencial de linguagem, “envolve o funcionamento da linguagem com um nevoeiro que impossibilita a clara visão”. Reconhecer que existem diferentes modos de ver as situações e de utilizar a linguagem para expressar suas interpretações e percepções de mundo é primordial para a compreensão da linguagem matemática, uma vez que há várias possibilidades na linguagem de lidarmos com um conteúdo matemático.

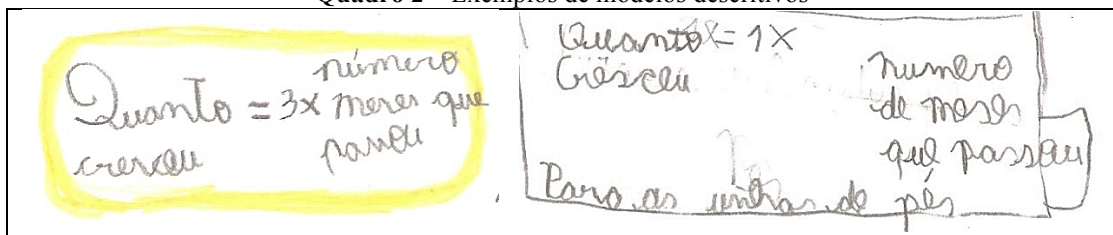
Os modelos matemáticos produzidos no contexto de atividades de modelagem matemática constituem exemplos desses diferentes usos da linguagem para interpretar matematicamente uma situação-problema. É nessa perspectiva que classificamos os modelos matemáticos produzidos para a atividade associada ao crescimento das unhas, usando como critério a estrutura matemática utilizada pelos alunos, que é explicitada na linguagem.

Ao analisar os registros produzidos pelos alunos, conseguimos identificar sete tipos de modelos matemáticos, categorizados por meio da análise de conteúdo. Em cada tipo de modelo identificamos regras que orientam o uso da linguagem na sua construção e um modo de ver e de interpretar que lhes são característicos e que, segundo Wittgenstein (2012), devem estar de

acordo o jogo de linguagem da matemática. “Deve-se aceitar certas regras para que se possa usar termos dentro de um discurso social” (IZMIRLI; 2013, p. 7). Descrevemos a seguir as categorias que indicam os tipos de modelos matemáticos produzidos pelos alunos.

Modelos descritivos: modelos matemáticos cuja estrutura descreve uma relação entre as variáveis tempo e crescimento das unhas e contempla certo nível de abstração e generalização. O Quadro 2 apresenta alguns exemplos.

Quadro 2 – Exemplos de modelos descritivos



Fonte: Dos autores.

Modelos aritméticos: consistem em uma estrutura matemática utilizada para expressar a relação entre as variáveis tempo e crescimento das unhas e têm como fundamento os números e as operações aritméticas elementares. Essa categoria engloba dois tipos de modelos matemáticos, cujos exemplos são apresentados no Quadro 3:

- *Modelos aditivos*, constituídos por uma sucessão de somas, cujas parcelas correspondem ao comprimento que a unha cresce mensalmente, isto é, a cada mês que a unha não é cortada adiciona-se uma parcela correspondente a ele. Podem também ser apresentados na forma de sequências, cujos termos correspondem ao crescimento da unha com o passar dos meses.
- *Modelos multiplicativos*, fundamentados na ideia de soma de parcelas iguais, uma multiplicação é realizada entre o quanto a unha cresce em um mês, pela quantidade de meses que não se corta a unha, assim, determina-se o comprimento da unha depois de um determinado número de meses.

Quadro 3 – Exemplos de modelos aritméticos

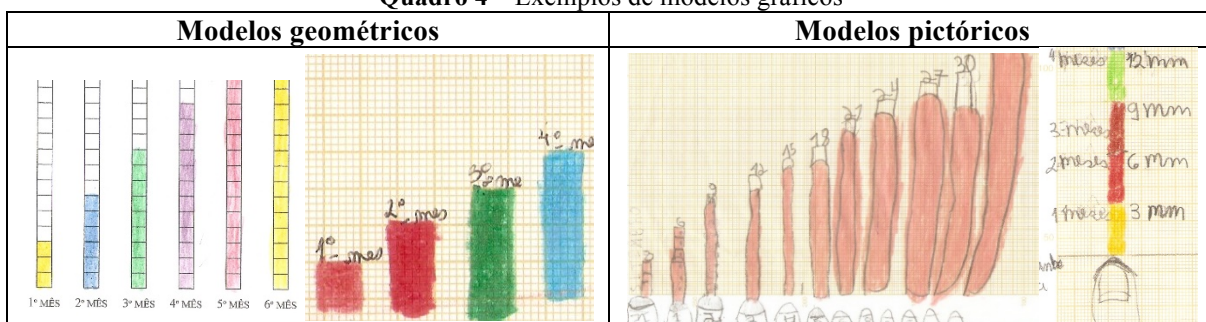
Modelos aditivos	Modelos multiplicativos
$\begin{array}{l} 1 \quad 3+1=4 \\ 2 \quad 3+3=6 \\ 3 \quad 3+3+3=9 \\ 4 \quad 3+3+3+3=12 \end{array}$	$\begin{array}{c c c c c c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \begin{array}{r} 1 \\ \times 3 \\ \hline 3 \end{array} & \begin{array}{r} 3 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array} & \begin{array}{r} 9 \\ \times 3 \\ \hline 27 \end{array} & \begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 81 \end{array} & \begin{array}{r} 81 \\ \times 3 \\ \hline 243 \end{array} & \begin{array}{r} 243 \\ \times 3 \\ \hline 729 \end{array} \\ \hline 1^{\text{o}} \text{ mês} & 2^{\text{o}} \text{ mês} & 3^{\text{o}} \text{ mês} & 4^{\text{o}} \text{ mês} & 5^{\text{o}} \text{ mês} & 6^{\text{o}} \text{ mês} \end{array}$

Fonte: Dos autores.

Modelos gráficos: estrutura matemática utilizada para organizar e apresentar dados e informações de maneira objetiva por meio de recursos visuais, que podem ser expressos na forma de figuras geométricas, diagramas, desenhos, ou, imagens. Essa categoria envolve dois tipos de modelos matemáticos, que são exemplificados pelo Quadro 4:

- *Modelos geométricos*, construídos para comparar visualmente alguns valores, utilizando para isso figuras geométricas retangulares, chamadas barras, caso as informações sejam representadas horizontalmente na forma de linhas, e chamadas colunas caso sejam representadas verticalmente. As informações nessas barras/colunas podem ser dispostas lado a lado ou empilhadas.
- *Modelos pictóricos*, constituídos por uma estrutura matemática que visa expor por meio de figuras ou imagens, de modo geral associadas ao tema, os dados e/ou informações associadas às situações-problema.

Quadro 4 – Exemplos de modelos gráficos



Fonte: Dos autores.

Modelos Tabulares: trata-se de uma estrutura matemática na qual os dados e/ou informações são organizados na forma de tabelas, de modo sintético e objetivo, mas que os contemplam em sua totalidade. O Quadro 5 apresenta alguns exemplos de modelos tabulares.

Quadro 5 – Exemplos de modelos tabulares

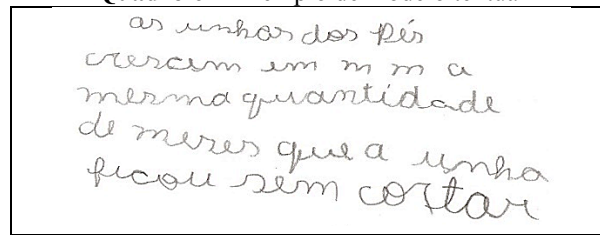
mês	quanto cresceu
1	3 m m
2	6 m m
3	9 m m
4	12 m m
5	15 m m
6	18 m m
7	21 m m

1º mês = a unha | cresceu em, 3 m m
 2º mês = a unha | cresceu em, 6 m m
 3º mês = a unha | cresceu em, 9 m m
 4º mês = a unha | cresceu em, 12 m m
 5º mês = a unha | cresceu em, 15 m m

Fonte: Dos autores.

Modelos Textuais: constituem-se em uma estrutura matemática na qual as relações entre as variáveis são descritas na forma de textos. O Quadro 6 exemplifica tal tipo de modelos.

Quadro 6 – Exemplo de modelo textual



as unhas dos pés
crescem em mm a
mesma quantidade
de meses que a unha
ficou sem cortar

Fonte: Dos autores.

Como se pode observar nas descrições das categorias construídas, não se busca por uma essência do que é cada tipo de modelo matemático, esses tipos são explicitados no uso da linguagem matemática. É nesse sentido que Wittgenstein (2012) afirma que as definições nada mais são do que descrições, que servem como regras a serem seguidas e que orientam o uso da linguagem. Não há, portanto, uma essência oculta por trás da linguagem. Para Wittgenstein, a matemática e seus conteúdos são manifestos na linguagem e, desta maneira, a matemática é significada no uso, por meio da participação dos alunos no seu jogo de linguagem. Da mesma maneira, Bassanezi (2002) coloca que só se aprende a usar a matemática da forma como a modelagem propõe fazendo modelagem matemática. “As regras e a forma do jogo [...] são aprendidas através da participação no jogo” (IZMIRLI; 2013, p. 7).

Nesse sentido, analisamos os tipos de modelos matemáticos obtidos olhando particularmente para cada série.

Com relação ao 1º ano, os modelos matemáticos produzidos por esses alunos são dos tipos: aritmético aditivo, gráfico geométrico e gráfico pictórico. Os modelos aritméticos aditivos, em geral, são apresentados na forma de sequência, 1, 2, 3, ... ou 3, 6, 9, ..., dando indícios da ideia de adicionar tomando-se o sucessor. Procedimento comum quando se está aprendendo a contar. Poucos se aventuraram em usar o sinal de adição (+) e alguns dos que utilizaram tiveram dificuldades em estruturar a expressão esquecendo por vezes de algum elemento constituinte da soma. Temos indícios aqui do que Wittgenstein (2012, § 6) chama de “ensino ostensivo”, ou seja, os alunos estão aprendendo a usar essa estrutura por meio de intervenções do professor, que traz consigo significados já estabelecidos a partir de padrões sociais (IZMIRLI, 2013). No que diz respeito aos modelos gráficos pictóricos, os alunos não mostraram preocupação em definir uma escala ou desenhar milimetricamente os comprimentos das unhas, porém, fica nítida a preocupação com a informação de que “a cada mês aumenta...”, ou seja, a cada mês que passa a unha *deve* ser maior que o comprimento do mês anterior. Essa é uma assertiva que provém da matemática, pois são suas regras que garantem que os sucessores

são sempre maiores que os antecessores. Poder-se-ia, contudo, dizer: mas a situação no mundo real também é assim! De fato, porém a uniformidade do crescimento das unhas é a hipótese que simplifica e idealiza a situação e possibilita o olhar matemático sobre ela. Portanto, o padrão de comportamento utilizado para comparação por esses alunos foi o tamanho dos desenhos das unhas. Os modelos geométricos por sua vez, foram produzidos por sugestão do professor, que forneceu aos alunos uma estrutura prévia para a construção do gráfico, para que eles utilizassem pelo menos uma escala e pudessem comparar os valores não apenas dizendo se é maior ou menor. Mas quão maior? Ou quão menor? E qual a diferença entre eles?

Com relação ao 2º ano, além dos tipos de modelos citados, novos tipos de modelos foram produzidos, a saber os modelos aritméticos multiplicativos e os modelos textuais. No caso dos aritméticos multiplicativos, como os alunos ainda não haviam trabalhado com multiplicação foi apenas introduzida a ideia de multiplicação a partir da soma de parcelas iguais. A palavra vezes foi escrita ao invés de usar o sinal da multiplicação (\times), ainda não conhecido por eles. Os modelos textuais surgiram como um desafio, uma vez que solicitados a explicar a situação, eles necessitaram da ajuda do professor para fazer a escrita. Isso mostra que os alunos estão aprendendo a usar a linguagem que geralmente usam em sua fala, a língua materna, para descrever procedimentos e relações matemáticas.

No 3º ano, surgiram entre os já citados os modelos descritivos e os modelos tabulares. Ambos foram pouco utilizados, prevalecendo o uso de registros aritméticos e gráficos. Cabe ressaltar que os modelos relacionais não envolveram variáveis, como ocorre em séries posteriores, mas a construção de uma expressão com um certo nível de abstração e generalização. Ainda assim, o foco estava em conteúdos como a soma e a multiplicação.

Já no 4º ano, os modelos tabulares passaram a ser mais utilizados. Contudo, prevalece ainda o uso de modelos aritméticos, no qual sobressaem-se as multiplicações. Os modelos descritivos também ganharam espaço, tendo ainda forte amparo na língua materna. Nessa série os alunos aparentaram um pouco mais de autonomia no uso e na manipulação da matemática.

Por fim, no 5º ano, os modelos multiplicativos foram mais utilizados, assim como o gráfico geométrico e o aritmético aditivo. A ideia de generalização, não apenas dessa situação em particular, mas de situações com características semelhantes manifesta-se por meio da discussão acerca do procedimento de resolução, ou de produção do modelo, que se assemelha à construção da tabuada. Ou seja, os alunos perceberam, assim como alguns do 4º ano, que caso

o crescimento das unhas fosse de 5 mm ao mês, o modelo se assemelharia à tabuada do 5, se fosse 6 mm à tabuada do 6, e assim por diante.

O olhar para esses modelos, por série, revela uma inserção desses alunos no jogo de linguagem da matemática ao longo dos anos e mostra que os modelos matemáticos produzidos por eles e os usos da linguagem matemática mostram-se tão sofisticados quanto os modelos produzidos por outros níveis de escolaridade (BASSANEZI, 2002). Vale lembrar, que para Wittgenstein, é na participação do jogo de linguagem que o sujeito, o aluno, aprende a agir segundo a forma de vida envolvida e aprende a jogar conforme as regras que o normatizam, isto é, é fazendo modelagem que os alunos aprendem a desenvolver essa atividade e a usar a linguagem matemática de forma apropriada.

6. Considerações Finais

Investigamos nesse artigo *Que modelos matemáticos são produzidos por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma atividade de modelagem matemática e que uso fazem da linguagem matemática nesse contexto?* Ao observar os modelos matemáticos produzidos pelos alunos das 5 turmas, encontramos indícios de que há um avanço no uso da linguagem matemática pelos alunos com o passar das séries. Há um refinamento no uso das estruturas matemáticas e no rigor com que são produzidas, além de um olhar mais autônomo com relação às regras e convenções estabelecidas no jogo de linguagem da matemática. Um exemplo disso é a construção de gráficos pictóricos, os quais produzidos pelo 1º ano, revelaram apenas a ideia de crescimento, de um termo ser maior que o anterior. Ao passo em que no 5º ano, alunos produziram modelos pictóricos levando em conta, e conscientes disso, uma escala ou usando papel milimetrado.

Isso revela uma dinamicidade com relação à produção de modelos matemáticos que a modelagem matemática proporciona por meio de usos da linguagem. Os modelos matemáticos, conforme chama atenção Bassanezi (2002), nunca são definitivos, sempre dão margem a modificações e melhorias, ou mesmo a novas maneiras de empregar a linguagem matemática. Além disso, Bassanezi (2002) defende o refinamento dos modelos como ideia básica da modelagem, particularmente quando estamos preocupados com o ensino e a aprendizagem da matemática, uma vez que esse refinamento exige do modelador novos conhecimentos, assim como o faz as diferentes séries.

Isso nos leva a crer que com o passar dos anos escolares os alunos inserem-se cada vez mais no jogo de linguagem da matemática e são condicionados a integrar as atividades associadas a esse jogo à forma de vida que lhe diz respeito. E essa inserção encaminha os alunos a novos usos da linguagem matemática, ampliando sua participação no jogo, que de acordo com as investigações filosóficas de Wittgenstein levariam o aluno à (re)construção de significados e, por conseguinte à aprendizagem.

Usar, portanto, a modelagem matemática desde os primeiros anos escolares pode contribuir para que os alunos insiram-se nesse jogo de linguagem, nesse modo de usar a linguagem matemática para resolver problemas, e sejam encaminhados para novos usos da linguagem, que podem desencadear aprendizagem.

7. Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais...** Pirenópolis: SBEM, 2015.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education**, Reston, v. 34, n. 2, p. 110-136, 2003.

FERRUZZI, E. C.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E.; ALMEIDA, L. M. W. Possibilidades de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em diferentes níveis de escolaridade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a social constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, Exeter, n. 27, p. 1-12, abr. 2013.

WITTGENSTEIN, L. J. J. **Investigações Filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012. 350 p. (Coleção Pensamento Humano). Tradução de: Philosophische Untersuchungen.