

O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EM PESQUISAS

Paulo Ferreira do Carmo
SEE/SP

paulo2012carmo@gmail.com

Maria Rosana Soares
PUC/SP

maryrosana@uol.com.br

Helena Tavares de Souza
Centro Universitário Ages

Helena_02souza@hotmail.com

Resumo:

Este artigo tem por foco a análise de resultados de pesquisas em Educação Matemática que utilizam como referencial teórico, o conceito pensamento matemático avançado. O objetivo do artigo é indicar quais aspectos desse conceito são levados em conta nessas pesquisas. O artigo traz resultados preliminares de uma pesquisa de doutorado, e como tal apresenta resultados relativos à análise de cinco dissertações e um artigo. A metodologia empregada segue as orientações da Análise de Conteúdo desenvolvida por Bardin (2011). Constatou-se que as pesquisas se concentram no Ensino Superior com alunos de licenciatura em Matemática, que o conceito de processos mentais de acordo com Dreyfus (1991) predominou nessas pesquisas e que a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado ocasiona dificuldades de aprendizagem para muitos estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado, Estado do Conhecimento, Educação Matemática.

Introdução

Na década de 1980 a Educação Matemática volta sua atenção também ao Ensino Superior. É nessa oportunidade que alguns teóricos introduzem o conceito de pensamento matemático avançado em uma diferenciação ao conceito de pensamento matemático elementar. A principal característica que diferencia esses dois tipos de pensamento matemático é que o avançado foca nas abstrações de conceitos matemáticos (TALL, 1991; DREYFUS, 1991). A partir de então vários pesquisadores desenvolveram estudos que visam caracterizar o que consideram o pensamento matemático avançado (TALL, VINNER, 1981; GRAY, TALL, 1994; SFARD, 1993; DREYFUS, 1991; DUBINSKY, 1991). Um levantamento de pesquisas voltadas à esse conceito, indica que Tall e Dreyfus são os pesquisadores que possuem vasta quantidade de publicações sobre o assunto. O estudo de Tall, no âmbito da teoria cognitivista tem trazido contribuições para o conhecimento de como

os humanos aprendem Matemática, as quais incluem a introdução de conceitos teóricos que visam a compreensão da aprendizagem da Matemática, como ‘conceito definição’ e ‘conceito imagem’, ‘raiz cognitiva’, ‘organizadores genéricos’, ‘proceito’ e ‘os três mundos da Matemática’. No início, tais conceitos se destinavam mais para a análise de aprendizagem no Ensino Superior, mas agora abrangem todo o período de aprendizagem dos indivíduos que crescem.

Para Dreyfus o pensamento matemático avançado consiste numa grande série de processos mentais que interagem entre si (representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair e formalizar) e assim sendo ele julga que é possível pensar em tópicos de Matemática avançada (aquela ensinada no Ensino Superior) de uma forma elementar e a distinção entre esses dois tipos de pensamentos reside na complexidade e na forma de como se lida com essa complexidade. De acordo com esse pesquisador, a abstração é o nível mais avançado do pensamento matemático. Um primeiro resultado obtido neste artigo é que a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado ocasiona dificuldades de aprendizagem para muitos estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior.

No entanto, o fato do número de pesquisas voltadas para o Ensino Superior ter crescido nas últimas décadas, e de muitas delas recorrerem ao conceito de pensamento matemático avançado, não implicou que houvesse um tratamento consensual dado ao conceito. Uma análise das pesquisas, em Educação Matemática, que utilizaram o conceito de pensamento matemático avançado, será apresentada neste artigo que tem por objetivo indicar quais aspectos desse conceito são considerados nessas pesquisas.

O conceito de Pensamento Matemático Avançado

De acordo com Tall “*o pensar em Matemática avançada nem sempre é um processo lógico para a criação de ideias matemáticas, envolve associação de ressonâncias entre ideias previamente desconectadas*” (1998, p.5).

Para esse pesquisador existe o pensamento criativo no pensamento matemático elementar e no avançado, ambos envolvem o uso da generalização, porém, é no pensamento matemático avançado que ocorre também a abstração. E esse estágio avançado de pensamento

matemático exige a abstração das propriedades geradoras de conceitos matemáticos para produzir definições conceituais que podem ser manipuladas de forma abstrata para desenvolver as relações lógicas entre os conceitos.

E juntamente com Vinner, Tall vai considerar que os conceitos matemáticos são encontrados de formas diferentes, antes de serem formalmente definidos na mente de cada indivíduo; que existe uma estrutura cognitiva complexa que produz uma variedade de imagens mentais quando um conceito é evocado (1981, p.1). De acordo com esses pesquisadores, na formação do pensamento matemático, é atribuído um nome ou associado um símbolo ao conceito que permite que ele seja comunicado ao aprendiz e que o auxilia em sua manipulação mental. No entanto, a estrutura cognitiva total que colore o significado do conceito é muito maior do que a estrutura relativa à evocação de um único símbolo, para esses pesquisadores é mais do que qualquer imagem mental, seja ela pictórica, simbólica ou de outra forma. Durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são colocados em jogo, consciente e inconscientemente afetando seu significado e uso. Tall (1981, p. 152, tradução nossa) define então, o “*termo conceito imagem para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados*”. Para esse pesquisador há ainda o conceito definição que é uma noção completamente diferente do conceito imagem, ele considera que o “*conceito definição é expresso por palavras usadas para especificar um determinado conceito matemático*” (1981, p. 152, tradução nossa). Pode ser aprendido por um indivíduo de forma mecânica ou, mais significativamente, aprendido e relacionado com maior ou menor grau com o conceito em sua totalidade.

Na década de 1990 Gray e Tall criam o termo ‘*proceito*’ identificando a dualidade de símbolos matemáticos, ora processo, ora conceito/objeto e definiram *proceito* da seguinte forma: “*Um proceito elementar é a amálgama de três componentes: um processo que produz um objeto matemático e um símbolo que é utilizado para representar um processo ou um objeto*”(1994, p.7, tradução nossa).

Recentemente Tall começou a desenvolver sua pesquisa com crianças recém-nascidas e traçou o desenvolvimento do pensamento matemático em toda a escola, universidade e para as fronteiras de sua investigação. Esse estudo oferece um quadro para o desenvolvimento do

pensamento matemático com base no desenvolvimento da percepção em sofisticação através do mundo de corporificação conceitual, a operação em desenvolvimento por meio de ações que se tornam operações matemáticas em um mundo de simbolismo operacional e o uso cada vez mais sutil da razão verbal que leva ao aspecto formal da corporificação e simbolismo e, eventualmente, para um mundo de formalismo axiomático. Esse quadro é baseado em três diferentes mundos da Matemática de desenvolvimento, interligados, sendo que dois deles são predominantes na Matemática elementar, e o terceiro na Matemática avançada, são eles:

- O mundo conceitual-corporificado que é construído nas percepções humanas e ações em desenvolvimento de imagens mentais verbalizadas em formas cada vez mais sofisticadas para se tornarem entidades mentais perfeitas em nossa imaginação;
- O mundo proceptual-simbólico que desenvolve a corporificação de ações humanas em processos simbólicos de cálculo e manipulação que podem ser compactados em proceitos para permitir o pensamento operacional flexível;
- O mundo axiomático-formal que desenvolve o conhecimento formal em sistemas axiomáticos especificados por definição teórica, cujas propriedades são deduzidas por prova matemática.

Se voltarmos a Dreyfus, observamos que ele considera que não há distinção nítida entre muitos dos processos do pensamento matemático elementar ou avançado, mesmo que a Matemática avançada seja mais focada nas abstrações de definição e dedução (1991, p.26). Muitos dos processos matemáticos a serem considerados já estão presentes no pensamento das crianças relativos a conceitos matemáticos elementares. O pesquisador descreve os processos mentais, que são relevantes para o pensamento matemático avançado, centrando nos processos cujas características tornam o pensamento matemático, avançado. Para esse pesquisador, é possível pensar em temas avançados em Matemática de uma forma elementar e, uma característica distintiva entre o pensamento matemático avançado e o elementar é a complexidade do tratamento dado à Matemática.

Para Dreyfus o pensamento matemático avançado consiste em uma grande variedade de interação entre processos mentais, como: representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair e formalizar. De acordo com o autor os

principais processos mentais que caracterizam o pensamento matemático avançado são: abstrair, representar e generalizar.

A análise que apresentamos neste artigo segue os preceitos metodológicos da Análise de Conteúdo desenvolvida por Bardin (2011) que caracteriza essa metodologia como “*um conjunto de técnicas e de análises das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens*”(p. 44). De acordo com a autora o que interessa não é a descrição do conteúdo, mas, sim, no que esse poderá ensinar de acordo com as categorias de análise.

Neste artigo utilizamos como categorias de análise: conceitos da teoria do pensamento matemático avançado, conteúdos matemáticos, sujeitos de pesquisas ou materiais analisados, metodologia de análise e resultados. Para Bardin (2011), a Análise de Conteúdo é organizada em torno de três pólos cronológicos: pré análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Com base no tratamento dos resultados, pode-se propor as inferências e adiantar interpretações e propósitos dos objetivos previstos ou descobertas inesperadas. Esses resultados podem ser codificados ou categorizados e partir de aí propor as inferências. O objetivo desse artigo é indicar quais aspectos do conceito de pensamento matemático avançado são considerados nessas pesquisas e de que forma eles fornecem subsídios para as análises dos dados levantados nas mesmas, tem-se com este artigo a pretensão de contribuir com a avaliação da potencialidade do conceito do pensamento matemático avançado na análise de fenômenos de interesse da Educação Matemática.

Pesquisas analisadas

“As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em Matemática” é pesquisa de Andersen (2011) que investigou que processos mentais podem intervir e serem combinados por alunos no desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ e verificou se esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais envolvidas no Teorema Fundamental do Cálculo. A pesquisa fundamentou-se nos processos mentais constituintes do pensamento matemático avançado (DREYFUS, 1991) e seus sujeitos de pesquisa foram quatorze alunos da licenciatura em Matemática.

As questões que nortearam o desenvolvimento dessa pesquisa foram: Quais processos mentais intervêm e são combinados quando se insere atividades que se apoiam em figuras construídas pelo aluno tanto em folha de papel quanto pelo software *Winplot* ao se tratar da expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$? Esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais que envolvem o Teorema Fundamental do Cálculo?

De acordo com a pesquisadora os resultados da pesquisa explicitaram que um trabalho dessa natureza contribuiu para que os alunos se apropriassem de inter-relações entre os conceitos envolvidos no Teorema Fundamental do Cálculo. Concluiu que os resultados obtidos em sua pesquisa mostraram que as escolhas feitas na elaboração do instrumento de coleta de dados foram adequadas e que o objetivo da pesquisa foi atingido, uma vez que muitos dos participantes conjecturaram que a derivação e integração são operações inversas uma da outra.

“Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em Matemática sobre sistemas de equações lineares” é pesquisa de Bertolazi (2012) que investigou os processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de licenciatura em Matemática em tarefas sobre sistemas de equações lineares. A investigação levou em consideração as características dos processos mentais constituintes do pensamento matemático avançado indicados por Dreyfus (1991) e Resnick (1987), nas concepções de Matemática (THOMPSON, 1997) e nas ideias de professor reflexivo (FREIRE, 2004, 2011). Para a obtenção dos dados foi utilizada uma proposta de avaliação reflexiva com dezessete estudantes de um curso de licenciatura em Matemática.

De acordo com as análises realizadas, a pesquisadora verificou que, dos dezessete participantes, dez atuavam como professores na Educação Básica, e a maioria desses apresentavam uma visão instrumentalista do ensino de Matemática, que de acordo com Thompson (1997) essa visão é uma acumulação de fatos, regras e habilidades a serem utilizadas na efetivação de um fim externo, ou até mesmo prescritiva da Matemática e que muitos desses ainda demonstraram atitudes reflexivas à luz das ideias de Freire (2004, 2011), pois evidenciaram autonomia e responsabilidade perante sua própria formação.

Como resultado foi indicado que todos os participantes apresentaram pelo menos três processos mentais diferentes de representação associados ao pensamento matemático

avançado, dentre nove que foram analisados, mas em relação aos processos mentais essenciais envolvendo a abstração matemática, apenas três professores dentre dezessete participantes manifestaram a capacidade de formalização, generalização e síntese na resolução de tarefas sobre sistemas de equações lineares.

“O uso de tecnologias no Ensino Médio: A integração de *Mathlets* no ensino da função afim” é pesquisa de Fonseca (2011) que teve como objetivo discutir e avaliar a utilização integrada do *Mathlets* como ferramenta nas aulas de Matemática, no estudo da função afim, em turmas do 1º série do Ensino Médio. O estudo fundamentou-se nos processos mentais constituintes do pensamento matemático avançado (DREYFUS, 1991; TALL, 1991) e na teoria dos três mundos da Matemática (TALL, POYNTER, 2002, 2007). A metodologia empregada consistiu na aplicação de uma sequência de atividades, com o auxílio do *Mathlets* e de dois testes.

Suas questões de pesquisa foram: Quais seriam as implicações educacionais decorrentes da inserção dessas inovações tecnológicas no ensino da Matemática? Como o professor pode agregar a utilização de recursos tecnológicos, às suas ações da prática de ensino de Matemática, com vistas à melhoria da aprendizagem dessa área de conhecimento?

O pesquisador verificou a partir das análises preliminares que os alunos apresentavam algumas dificuldades em estabelecer relação de dependência entre as variáveis do problema, e também de generalização dos resultados. À medida que os alunos foram interagindo com o *software*, na resolução das atividades, percebeu que eles começavam a entender as relações das dependências entre as variáveis, desenvolvendo a capacidade de generalização. De acordo com o pesquisador, a interação dos alunos nessas cenas serviram para ajudá-los a desenvolverem seus conceitos imagens adquirindo a abstração necessária para encontrar a lei matemática correspondente à função que modelava o problema.

De acordo com o pesquisador os resultados mostraram que a integração do *Mathlets*, como inovações tecnológicas, no ensino da função afim, levou os alunos a uma autonomia crescente na realização das atividades (FONSECA, 2011, p. 134) e que é necessário que o professor desenvolva materiais consistentes, que permitam certa “adaptação”, a fim de garantir a eficácia da aplicação dessas atividades, permitindo que elas, sejam adaptáveis à realidade de cada turma (p. 135).

“O ensino da função logarítmica, por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra” é pesquisa de Santos (2011) que buscou elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática para o ensino da função logarítmica utilizando tal *software* como estratégia pedagógica. A pesquisa fundamentou-se nos processos mentais constituintes do pensamento matemático avançado (DREYFUS, 1991) e na teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2009). A pesquisadora desenvolveu seu instrumento de pesquisa baseado no Caderno do Professor de Matemática (SEE/SP) da 1ª série Ensino Médio volume 3 e seus sujeitos de pesquisa foram seis estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual de São Paulo.

Suas questões de pesquisas foram: Os alunos com a sequência didática proposta neste trabalho conseguem reconhecer alguns elementos fundamentais para o estudo da função logarítmica, tais como domínio, imagem e o esboço do gráfico? Em que medida? Quais as dificuldades encontradas? Quais avanços percebidos? O uso do *software* GeoGebra como estratégia didático-pedagógica no estudo da função logarítmica contribuiu ou não para a aprendizagem dos alunos?

De acordo com a pesquisadora, o professor de matemática ao propor aos seus alunos atividades matemáticas necessita ter conhecimentos de quais processos cognitivos podem favorecer a aprendizagem, e como apresentar aos estudantes conteúdos matemáticos que possibilitem o desenvolvimento desses processos e contribuam com a aprendizagem (SANTOS, 2011, p. 187).

De acordo com suas análises Santos (2011) concluiu que no decorrer das sessões as duplas foram evoluindo, as discussões entre as duplas favoreceram o levantamento de hipóteses sobre o comportamento do gráfico da função, do domínio e da imagem e que o uso do *software* GeoGebra como uma estratégia didático-pedagógica contribuiu para a aprendizagem desses alunos. Todas as duplas destacaram a importância da visualização do gráfico da função no *software*, além da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido (p. 190).

“Ensino de derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização como o uso do GeoGebra” é pesquisa de Junior (2015) que teve como objetivo discutir as contribuições da realização de atividades exploratórias para a aprendizagem de diversos conteúdos

relacionados a derivadas de funções reais de uma variável real no ensino de Cálculo I, a partir da visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra. Utilizou como referencial teórico os conceitos do pensamento matemático avançado (TALL, 1995; DREYFUS, 1991). Seus sujeitos de pesquisa foram quatro professores do Ensino Superior com experiência docente em Cálculo.

Sua questão de pesquisa foi: Que contribuições a realização de atividades exploratórias com o uso do GeoGebra pode trazer à aprendizagem de derivadas a partir da visualização?

De acordo com o autor a pesquisa se mostrou adequada ao trabalho dos professores, pois proporcionou uma facilidade para se trabalhar com questões complexas e de difícil compreensão, tornando possível estabelecer uma maior valorização do tempo com as definições e verificação de exemplos que esses conteúdos possuem e ainda permitindo aos docentes, a realização de questionamentos e reflexões que podem surgir do diálogo com os alunos, entre a teoria e a prática que é construída na sala de aula com a proposição de atividades elaboradas e adaptadas a partir de livros didáticos. O autor acredita que sua pesquisa trouxe uma possibilidade aos professores de Cálculo I de repensar o seu trabalho na sala de aula, com seus alunos, a respeito do que está sendo construído por esses atores, durante o estudo de gráficos de funções e suas derivadas ou conteúdos semelhantes e ainda afirmou que o ensino com o auxílio de tecnologias computacionais, mediado pelo professor, demanda de uma preparação, entendimento, reflexão sobre a necessária articulação com a teoria que vai ser construída na realização das atividades com os alunos (JUNIOR, 2015, pp 114-115).

Em seu artigo intitulado “Processo do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE” Gereti e Savioli (2015) tiveram como objetivo descrever e discutir indícios/características dos processos do pensamento matemático avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do ENADE. O estudo fundamentou-se nos processos mentais constituintes do pensamento matemático avançado (DREYFUS, 2002). Seus sujeitos de pesquisa foram seis estudantes de licenciatura em Matemática.

De acordo com suas análises verificaram que seis estudantes apresentaram indícios do processo de representação simbólica; três do processo de visualização; quatro do processo de mudança de representações e tradução entre elas; dois evidenciaram o processo de modelação; quatro de sintetização; e nenhum mobilizou o processo de generalização.

Os autores afirmam que os processos do pensamento matemático avançado se fazem importantes, os quais permitem que os estudantes compreendam uma gama de conceitos matemáticos e afirmam que estudantes devem ser conduzidos para desenvolverem os processos mentais desse tipo de pensamento, uma vez que alguns professores ainda ensinam aspectos matemáticos mais práticos, seguindo a sequência teorema - prova - aplicação. Gereti e Savioli (2015) afirmam que, de acordo com os estudos de Dreyfus (2002), a consequência disso é que estudantes realizam apenas técnicas e repetições, tendo uma quantidade considerável de conhecimento matemático, mas não desenvolvem a reflexão nos processos que levaram matemáticos a construir teorias.

Análises preliminares

A partir do estudo dessas pesquisas relatadas neste artigo, que utilizaram os conceitos do pensamento matemático avançado, de acordo com Tall e Dreyfus, fizemos uma tabela (Tabela 1) com as principais características dessas pesquisas; desde os conceitos utilizados nos referenciais teóricos, conteúdos matemáticos, sujeitos de pesquisas ou materiais, metodologia e resultados de pesquisas com intuito de indicar quais aspectos desse conceito são levados em conta nessas pesquisas.

Tabela 1: Principais características das pesquisas analisadas neste artigo.

Autores	Tema e sujeitos	Referencial teórico e metodológico	Conclusões
Andersen (2011)	Teorema Fundamental do Cálculo. Alunos de licenciatura em Matemática	Dreyfus (1991). Engenharia Didática; Almouloud (2007)	Os resultados obtidos mostraram que o objetivo da pesquisa foi atingido, uma vez que muitos dos participantes conjecturaram que a derivação e integração são operações inversas uma da outra.
Bertalozzi (2012)	Sistemas de equações lineares. Alunos de licenciatura em Matemática	Dreyfus (1991), Resnick (1987), Thompson (1997) e Freire (2004, 2011). Investigação Qualitativa em Educação; Bogdan e Biklen (1994)	Todos os participantes apresentaram pelo menos três processos diferentes de representação, mas em relação aos processos envolvendo a abstração matemática apenas três, dentre os dezessete participantes.

Fonseca (2011)	Função afim. Alunos da 1ª série do Ensino Médio	Dreyfus (1991), Tall (1991) e Poynter e Tall (2002 e 2007). Engenharia Didática; Artigue (1988).	A integração do <i>Mathlets</i> , como inovação tecnológica, no ensino da função afim, levou os alunos a uma autonomia crescente na realização das atividades propostas.
Santos (2011)	Função logarítmica. Alunos do 3ª série do Ensino Médio.	Dreyfus (1991) e Duval (2009). Engenharia Didática; Artigue, Douady e Moreno (1995).	O uso do <i>software</i> GeoGebra como uma estratégia didático-pedagógica contribuiu para a aprendizagem dos alunos.
Junior (2015)	Derivadas de funções reais de uma variável real. Professores de Ensino Superior.	Dreyfus (1991), Tall (1995) e Presmeg (2006). Pesquisa qualitativa; Ludke e André (1986), Bogdan e Biklen (1994), Alves-Mazzotti (1998) e Fiorentini e Lorenzato (2012).	Os resultados obtidos apontam que a visualização proporcionada pelo <i>software</i> GeoGebra contribuiu para uma ressignificação de diversos conceitos e propriedades de derivadas.
Gereti e Savioli (2015)	Geometria e Probabilidade. Alunos de licenciatura em Matemática.	Dreyfus (2002). Pesquisa qualitativa; Bogdan e Biklen (1994) e Análise de Conteúdo; Bardin (2004)	Os estudantes devem ser conduzidos para desenvolverem os processos do pensamento matemático avançado, uma vez que alguns professores ainda ensinam aspectos matemáticos mais práticos, seguindo a sequência teorema - prova-aplicação.

Fonte: Tabela desenvolvida pelos pesquisadores

A Tabela 1 indica que essas pesquisas se concentraram em conteúdos do Ensino Superior (4 pesquisas das 6 analisadas). Todas as publicações analisadas foram de caráter empírico envolvendo sujeitos em suas pesquisas (4 no Ensino Superior – 3 na licenciatura de Matemática - e 2 no Ensino Médio). Todas as pesquisas analisadas referenciaram os processos mentais, que de acordo com Dreyfus (1991, 2002) o pensamento matemático avançado consiste em uma grande variedade de interação entre esses processos mentais (representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair e formalizar) e que as principais interações que caracterizam o pensamento matemático avançado são a abstração, a representação e a generalização e duas de acordo com Tall et al. (1991, 1995, 1999 e 2002) mostrando a importância dessa teoria cognitiva para as pesquisas, no ensino e aprendizagem de Matemática, no Ensino Básico e no Ensino Superior.

De acordo com nossas análises preliminares podemos afirmar que os professores de Matemática podem diversificar a metodologia de aulas para facilitar o desenvolvimento do pensamento matemático avançado de acordo com a teoria dos pesquisadores Tommy Dreyfus e David Tall e que o uso da tecnologia pode facilitar a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado possibilitando melhorias na aprendizagem dos estudantes.

Referências

- ANDERSEN, E. As ideias centrais do Teorema Fundamental do cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em Matemática. Mestrado Acadêmico em Educação Matemática PUC-SP, 2011.
- BARDIN, L. Análise de conteúdo. Almedina: Edições 70, 2011.
- BERTALOZI, K. S. Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em Matemática sobre sistemas de equações lineares. Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática UEL, 2012.
- DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. In: D. O. (Ed) Advanced Mathematical Thinking , pp. 25-41. Dordrecht: Kluwer, 1991.
- FONSECA, V. G. O uso de tecnologias no Ensino Médio: a integração de *Mathlets* no ensino de função afim. Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática UFRJ, 2011.
- GRAY, E. M.; TALL, D. O. Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. Journal for research in Mathematics Education, pp. 116-140, 1994.
- GERETI, L. C. V.; SAVIOLI, A. M. P. D. Processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE. In: Bolema, v. 29, n. 51, pp. 206-222, 2015.
- IGLIORI, S. B.C. Pensamento Avançado Matemático: em debate. In: RELME, 2012.
- JUNIOR, J. C. M. Ensino de Derivadas em Cálculo I : aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. Mestrado profissional em Educação Matemática UFOP, 2015.
- SANTOS, A. T. C. O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra. Mestrado Acadêmico em Educação Matemática PUC-SP, 2011.
- TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics, v. 12, n. 2, pp. 151-169, 1981.
- TALL, D. O. Concept images, generic organizers, computers and curriculum change. For the learning of mathematics, pp. 37-42, 1989.
- TALL, D. O. Advanced mathematical thinking. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- TALL, D. O. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. O. (Ed) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht : Kluwer, pp. 3-20, 1995.
- TALL, D. O. Embodiment, symbolism and formalism in under graduate mathematics education. In: Plenary paper at 10 th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Under graduate Mathematics Education, pp. 22-27, 2007.
- TALL, D. O. How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press, 2013.
- WATSON, A.; TALL, D. O. Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. In: Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), Proceedings of the 26 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, pp. 369-376. Norwich: UK, 2002.