

## EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR-GT4 DA SBEM TEXTO 2: ÊNFASE NAS PESQUISAS ENVOLVENDO O CÁLCULO

*Lilian Nasser*  
*Projeto Fundão – IM/UFRJ*  
*lnasser.mat@gmail.com*

### **Resumo:**

Nesta mesa redonda pretendemos fazer um levantamento dos trabalhos apresentados no Grupo de Trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior (GT4) dos Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) e o destaque dado a esse tema nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM). Além disso, discutimos um dos principais temas de pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior: as investigações envolvendo o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Os trabalhos envolvem temas específicos dessa disciplina, como a aprendizagem de limites e continuidade, a resolução de problemas de taxas relacionadas e de máximos e mínimos e o trabalho com a elaboração e interpretação de gráficos. Destaca-se também o foco na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, procurando averiguar as causas para o alto índice de abandono e repetência na primeira disciplina de Cálculo.

**Palavras-chave:** Ensino Superior; Cálculo; SIPEM; ENEM.

### **1 Introdução**

Por ocasião da realização do I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), em 2000, os Grupos de Trabalho temáticos (GT) foram estabelecidos pela SBEM. A Educação Matemática no Ensino Superior é o tema do GT4, que congrega professores de Instituições de Ensino Superior (IES) públicas e privadas de todo o país, sendo sua primeira coordenadora a professora Lilian Nasser, do IM/URJ. Desde então esses seminários vêm acontecendo a cada três anos, sendo o último, o VI SIPEM, realizado em 2015 em Pirenópolis (GO). Paralelamente aos SIPEM's, a coordenação do GT4, desde o início, tem incentivado a apresentação de trabalhos de pesquisa envolvendo a Matemática no Ensino Superior em outras oportunidades, como os Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), além

de Encontros Estaduais. Também foram publicados dois livros com trabalhos dos membros do GT4, organizados pela coordenação do grupo nos anos das publicações (NASSER e FROTA, 2009; FROTA, BIANCHINI e CARVALHO, 2013). No prefácio do segundo livro, consta que

desde a criação do grupo de trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior (GT4), [...], o Ensino Superior tem se firmado como uma área sólida de pesquisa em Educação Matemática, que procura explorar as múltiplas facetas do pensamento matemático avançado. (FROTA, BIANCHINI e CARVALHO, 2013, p. 9).

Neste trabalho apresentamos uma síntese da produção de pesquisas voltadas para o Ensino Superior nos últimos 15 anos, que indica a importância de incentivar o seu destaque em meio aos temas de outros eixos e grupos temáticos de discussão e pesquisa em Educação Matemática. Além disso, destacamos as tendências das pesquisas sobre o tema mais frequentes nos trabalhos sobre a Educação Matemática no Ensino Superior, que se referem ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

## 2 A Educação Matemática no Ensino Superior nos SIPEM

Na primeira reunião do GT4, no I SIPEM, realizado em Serra Negra (SP), em 2000, foram apresentados 11 trabalhos, enfocando: uso de novas tecnologias no ensino, funções da prova e da argumentação, análise de livros didáticos, compreensão de tópicos específicos de Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear, as disciplinas do ciclo básico da área de exatas e o tratamento especial que deve ser dado aos cursos de licenciatura em Matemática.

O II SIPEM foi realizado em Santos (SP), em 2003, para o qual o GT4 recebeu a submissão de 20 trabalhos, sendo 15 selecionados. A predominância dos trabalhos apresentados foi em aspectos do ensino-aprendizagem de Cálculo, mas também foram enfocadas estratégias inovadoras para o ensino de Álgebra Linear, Geometria Analítica, Geometria Dinâmica e Probabilidades, visando provocar mudanças. Os referenciais adotados nesses trabalhos foram a análise de erros, análise de livros didáticos, investigação de dificuldades conceituais e de natureza epistemológica.

No III SIPEM, realizado em Águas de Lindóia (SP), em 2006, foram apresentados 16 trabalhos, agrupados em três sessões: Formação Matemática (coordenada por Lilian Nasser), Formação em disciplinas específicas (coordenada por Helena N. Cury) e Formação de professores (coordenada por Maria Clara Frota). Quase metade destes trabalhos se referia a temas inerentes ao Cálculo. Neste encontro foi eleita a nova coordenadora do GT4, a professora Maria Clara Frota, da PUC-MG.

Já no IV SIPEM, realizado em Taguatinga, Brasília, em 2009, dos 22 trabalhos apresentados, sete versavam sobre problemáticas referentes ao Cálculo. Do mesmo modo, havia sete trabalhos de Cálculo entre os 18 artigos aceitos para apresentação no V SIPEM, realizado em Petrópolis, no Rio de Janeiro, em 2012. Após dois triênios, a coordenação do GT passou, nesse seminário, para a professora Bárbara Bianchini, da PUC-SP. O último SIPEM aconteceu em novembro de 2015, em Pirenópolis, GO. Dos 14 trabalhos apresentados, dez abordavam a temática do Cálculo.

Analisando esses dados, pode-se perceber a predominância dos trabalhos envolvendo o ensino e aprendizagem de Cálculo nos temas abordados sobre a Educação Matemática no Ensino Superior.

### **3. A Educação Matemática no Ensino Superior nos ENEM**

O GT4 mereceu destaque no VII ENEM, o primeiro realizado após a sua criação, no Rio de Janeiro em 2001. Foram apresentados 11 trabalhos enfocando o Ensino Superior, debatendo os temas: O que muda no ensino de Cálculo e Álgebra Linear com a introdução das novas tecnologias? Que enfoque e com que profundidade devem ser abordadas as disciplinas de Matemática nos cursos de ‘serviço’? Que abordagem especial deve ser adotada nas disciplinas do ciclo básico para os cursos de Licenciatura em Matemática? De que maneira as dificuldades existentes na Escola Básica estão interferindo nos cursos ministrados na Universidade? Ainda nesse VII ENEM foi realizada uma Mesa Redonda sobre a Educação Matemática no Ensino Superior, com a participação de Lilian Nasser (UFRJ), Marcia Pinto (UFMG, atualmente na UFRJ) e Silvia Dias Alcântara Machado (PUC-SP).

A participação do GT4 também foi marcante no encontro seguinte, o VIII ENEM, realizado em Recife, em 2004. Foi apresentada uma Mesa Redonda com a participação de Lilian Nasser (IM/UFRJ), Maria Clara Rezende Frota (PUC-MG), Silvia Dias Alcântara Machado (PUC-SP) e Wanderley Rezende (UFF), além de uma palestra de Arlindo de Souza Jr. (UFU).

O IX ENEM, realizado em Belo Horizonte (MG) em 2007, também contou com uma Mesa Redonda sobre a Educação Matemática no Ensino Superior e foram apresentados diversos trabalhos enfocando o Ensino Superior em geral, e o Cálculo em particular.

No X ENEM havia um eixo temático dedicado ao Ensino Superior, permitindo a apresentação de vários trabalhos, e a inserção de uma palestra sobre a Transição do Ensino Médio para o Superior, proferida pela professora Gilda Pallis, e uma Mesa Redonda sobre o tema do GT4, composta por membros do GT4.

A partir do XI ENEM, realizado em Curitiba (PR), a temática do GT4 parece ter perdido espaço, não merecendo um eixo temático para onde seriam direcionados os trabalhos voltados para o Ensino Superior. Como consequência, não foi apresentada uma Mesa Redonda sobre esse tema no XI ENEM. O mesmo acontece neste XII ENEM, que não destinou um espaço para as pesquisas sobre a Educação Matemática no Ensino Superior. O eixo que mais se aproxima é o Eixo 4: “Recursos Didáticos e Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior”. Ou seja, os trabalhos voltados para o Ensino Superior, que podem ter outras características que não envolvem recursos didáticos só poderiam ser submetidos a este eixo. No entanto, em sua coordenação, não há pesquisadores do GT4 e, como consequência, ficou prejudicada a indicação de membros desse grupo como pareceristas.

#### **4. Os livros produzidos pelo GT4**

A partir do III SIPEM, em 2006, o GT4 iniciou esforços no sentido de concretizar esforços para a organização e publicação de um livro congregando as pesquisas na área. Tal proposta avançou numa reunião aberta do GT, realizada durante o IX ENEM, em Belo Horizonte (MG), em 2007, quando foi montada uma comissão para preparar tal publicação. O livro, organizado por Frota e Nasser (2009), foi lançado no IV SIPEM, conta com 15 capítulos, Destes, sete tratam do ensino-aprendizagem de Cálculo e/ou Análise e um trata da Álgebra Linear. Os demais lidam com a afetividade (dois), a formação de professores e metodologias de ensino (três) e com o uso de tecnologia no Ensino Superior (dois).

#### **5. Os trabalhos sobre o ensino-aprendizagem de Cálculo**

A transição do pensamento matemático elementar para o avançado gera dificuldades em alunos do Ensino Superior, pois requer a construção de fundamentos intuitivos para

conceitos matemáticos mais elaborados. De acordo com Tall (1992), essa transição requer uma reconstrução cognitiva, levando à abstração. Três processos contribuem para a abstração: representação, generalização e síntese. As dificuldades em empreender esse caminho para a abstração têm motivado trabalhos de pesquisa inerentes ao Ensino Superior. Como vimos pela descrição dos trabalhos apresentados na temática do GT4 tanto no ENEM quanto no SIPEM, há uma supremacia dos trabalhos envolvendo os conteúdos de Cálculo. Muitos desses trabalhos são motivados pelos altos índices de reprovação e de evasão nos cursos de Cálculo, que remetem a investigações sobre suas causas, buscando sugestões para tentar reverter esse quadro. Em geral, chega-se à constatação de que um dos vilões das dificuldades dos alunos é o conceito de função, em geral, mal construído na Educação Básica.

Rezende (2003), por exemplo, afirma que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem nessa disciplina. A pesquisa desenvolvida por Palis (2010) tem foco nos cursos de pré-Cálculo da PUC-Rio, indicando a tecnologia como ferramenta que pode auxiliar no domínio de funções e seus gráficos.

Em Nasser (2009) é investigado o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos, constatando que as dificuldades se devem, principalmente, à falta de preparação prévia em relação ao conteúdo de funções e sugere ações que podem ajudar a superá-las, como “desenvolver estratégias de ensino apropriadas, de acordo com os estilos de aprendizagem dos alunos, em particular, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos” (p. 54). Tal estratégia tem dado bons resultados, pois a partir de um gráfico básico, do domínio dos alunos, é possível traçar gráficos mais complexos. A figura 1 mostra as transformações aplicadas à parábola  $y = x^2$  para obtenção da parábola  $y = x^2 - 4x + 3$ . É preciso completar o quadrado e expressar essa função por  $y = (x - 2)^2 - 1$ .

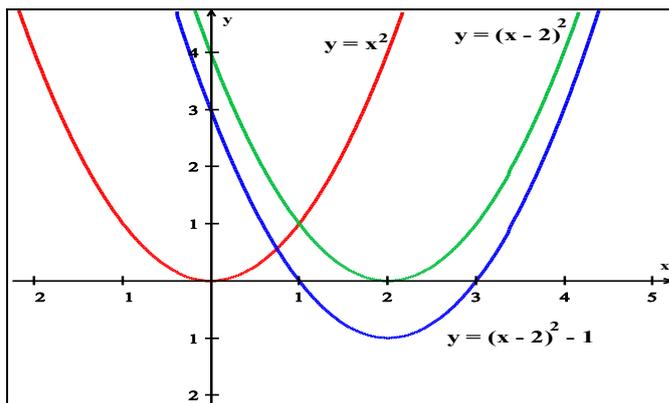


Figura 1 – Gráfico obtido a partir de translações

Procedimentos semelhantes podem ser usados para traçar gráficos a partir dos gráficos básicos de funções trigonométricas, exponencial e logaritmo. Essa estratégia facilita o trabalho nas disciplinas seguintes de Cálculo, que exige o domínio de gráficos de funções de duas variáveis, como mostra a figura 2.

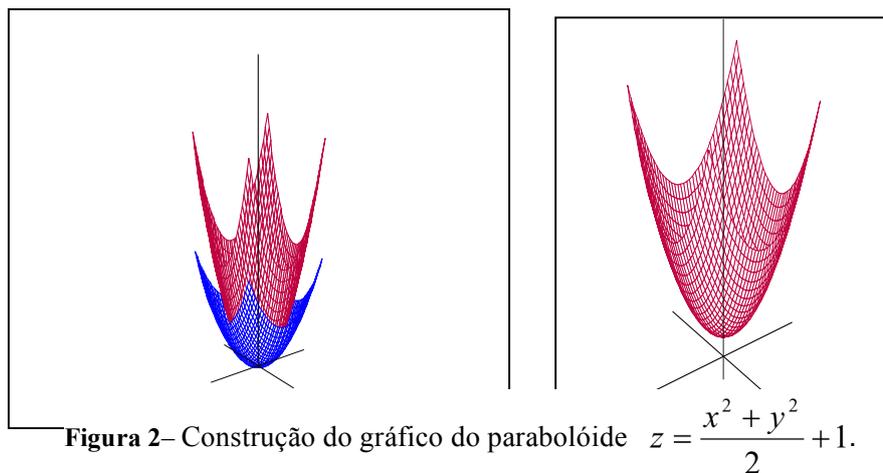


Figura 2 – Construção do gráfico do parabolóide  $z = \frac{x^2 + y^2}{2} + 1$ .

No cenário internacional, Even (1990) também observou dificuldades no domínio de funções em sua pesquisa. Ela relata a insegurança de futuros professores em decidir se

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases} \text{ é ou não uma função.}$$

Checando com a definição de função, um sujeito da pesquisa afirmou que é uma função, já que “há uma imagem única para cada número” (p. 528). No entanto, na tentativa de traçar o gráfico dessa função, esse futuro

professor marcou alguns números irracionais no eixo dos  $x$ :  $\sqrt{3}$ ,  $\frac{7}{4}$  (considerando uma

fração imprópria como um número irracional) e esboçou uma parte da reta  $y = x$  com buracos, conforme ilustrado a seguir na Figura 3.

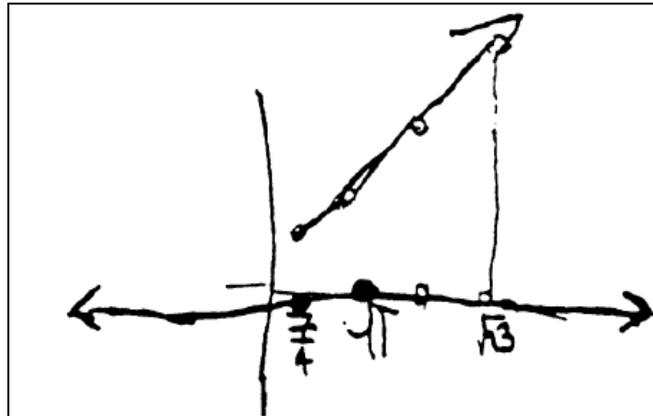


Figura 3 – Gráfico de um futuro professor para a função  $g(x)$ .

Even (1990) afirma ainda que

essa situação é compreensível – quase todas as funções encontradas por alunos do Ensino Médio e mesmo de faculdades são do tipo que têm um gráfico “simples” e podem ser descritas por uma fórmula, de modo que o seu conceito imagem de uma função é determinado pelas funções que eles vivenciam, e não pela definição moderna de uma função, que enfatiza a sua natureza arbitrária. (p. 529)

Outra dificuldade característica dos conteúdos de Ensino Superior: a necessidade de lidar com o pensamento matemático avançado. Analisando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991) apontam mudanças quantitativas:

mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. (ROBERT e SCHWARZENBERGER, 1991, p. 13)

Em relação à aprendizagem de Cálculo, diversos pesquisadores apontam a existência de obstáculos, cuja noção está relacionada a algum entrave como causa das dificuldades. Em nossas pesquisas com alunos do Ensino Médio e calouros universitários na disciplina de Cálculo, observamos algumas respostas que exemplificam a presença de algum obstáculo à aprendizagem (SIERPINSKA, 1992), que destacamos a seguir.

- a concepção ingênua de que “o gráfico de uma função não precisa ser exato”. Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I ao

traçar gráficos de funções simples como  $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 + 4, & \text{se } x < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ (x-5)^2 - 4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$ . A figura 4

(NASSER, SOUSA e TORRACA, 2015) mostra a dificuldade de lidar com funções descontínuas e o descuido de um aluno de Cálculo I, em marcar os pontos críticos na representação gráfica dessa função.

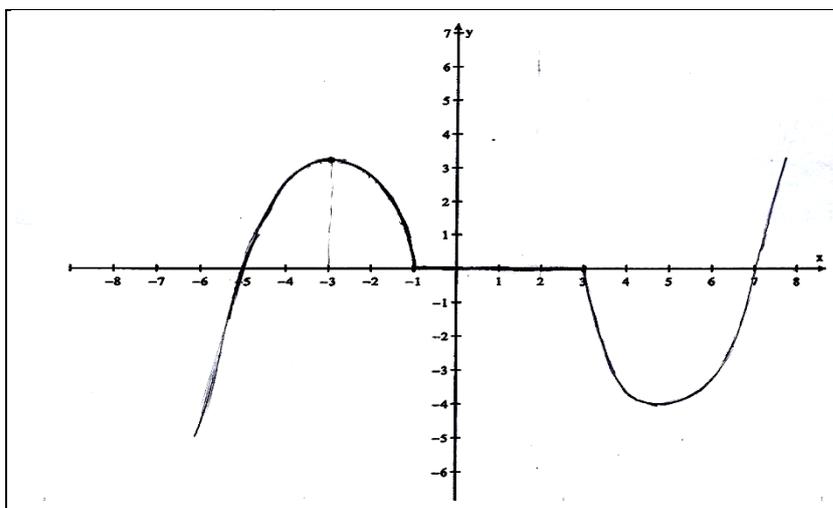


Figura 4 – Gráfico sem exatidão nos pontos críticos

- a concepção de que “apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções”. De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças.

Nasser, Sousa e Torraca (2015) observaram essa dificuldade como mostra a figura 5, que apresenta o gráfico de um aluno de Cálculo para a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{para } x \leq 3 \\ x^2 + 5, & \text{para } 3 < x \leq 2 \\ x - 2, & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

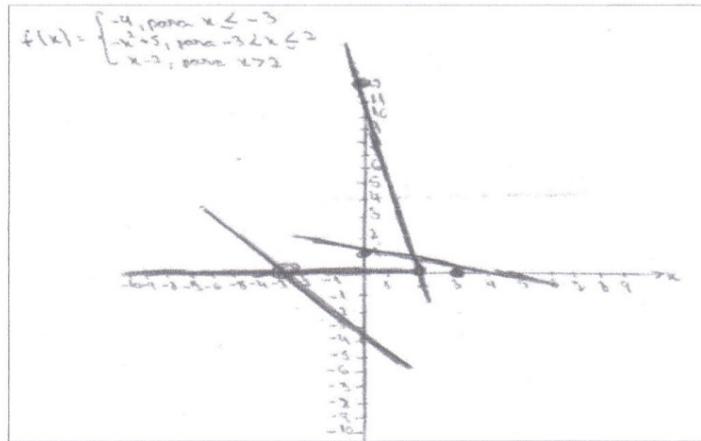


Figura 5– Gráfico incorreto para uma função definida por várias sentenças.

- a crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta, deixando de considerar a lei de formação da função. Acreditamos que esse obstáculo se deve ao fato de que a grande maioria de gráficos veiculados pela mídia é desse tipo, formados por segmentos de reta. Em sua pesquisa, Even (1990) ressalta que a primeira abordagem de funções, marcando pontos, não é difícil de aprender, mas

uma abordagem com marcação de pontos para o traçado de gráficos de funções é, em muitos casos, menos poderosa que um método que enfatiza uma análise mais global do comportamento da função. Por exemplo, fazer o gráfico de uma função quadrática que tem (-100,78) como vértice pela marcação de vários pontos próximos de (0, 0) não vai produzir um gráfico informativo. Também, traçar o gráfico de uma função que é descontínua em  $x=(0,3)$  pela marcação de pontos com coordenadas inteiras e ligá-los vai produzir um gráfico errado. (EVEN, 1990, p. 534)

- as dificuldades na transposição da representação verbal (descrição da situação problema) para representações analítica e gráfica, isto é, escrever uma sentença matemática que relacione as grandezas envolvidas no problema e representá-la graficamente. De acordo com Duval,

há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. (DUVAL, 2003, p. 31).

Em geral, a interpretação do enunciado de uma situação problema e sua transposição para uma expressão analítica da função que envolve não são tarefas fáceis para alunos no início da graduação, levando a erros na resolução dos problemas propostos.

Estes são apenas alguns exemplos de trabalhos desenvolvidos, com o objetivo de minimizar o impacto da transição do Ensino Médio para o Superior, evidenciando a importância de diminuir a reprovação e o abandono nas primeiras disciplinas de Cálculo.

## 6. Considerações Finais

A produção de pesquisas no âmbito da Educação Matemática no Ensino Superior evidencia questões variadas e complexas, inerentes a esse nível de ensino. São temas e aspectos que, muitas vezes, têm interseção com temáticas de outros grupos de trabalho da SBEM. No entanto, assumem, no GT4, especificidade própria do desenvolvimento do pensamento matemático avançado e da formação e desenvolvimento profissional de professores de Matemática para o Ensino Superior.

Com o objetivo de minimizar a evasão e a repetência nos primeiros semestres do curso universitário, Nasser, Sousa e Torraca (2012) recomendam uma postura dos professores de Matemática do Ensino Médio, de modo a desenvolver nos alunos uma prontidão para o Cálculo, por meio da exploração adequada de tópicos de funções e de geometria espacial.

Esperamos com este trabalho motivar novas investigações, fortalecendo a pesquisa voltada para a Educação Matemática no Ensino Superior. Em particular, cada professor pode e deve empreender investigações sobre sua própria prática, na tentativa de compreender melhor os problemas de aprendizagem enfrentados por seus alunos e transformar sua prática pedagógica, visando aprimorar os resultados.

O levantamento histórico do GT4 e os exemplos específicos em relação ao tópico de Cálculo apresentados neste trabalho dão uma ideia da importância merecida pela Educação Matemática no Ensino Superior, que esperamos seja resgatada nos próximos ENEM's.

## 7. Referências

DUVAL, R. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papyrus, 2003. p.11-33.

EVEN, R. *Subject matter knowledge for teaching and the case of functions*. *Educational Studies in Mathematics*, 21,1990, p. 521-544.

FROTA, M. C. R. e NASSER, L. (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, SBEM: Brasília, 2009.

FROTA, M. C. R., BIANCHINI, B. R. e CARVALHO, A. M. T. (org.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior*, SBEM, Papyrus, Campinas, SP, 1013.

NASSER, L. *Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos*. In: Frota, M. C. R. e Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, p. 43-58. SBEM, 2009, p. 43-56.

NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. *Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?* Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.

NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. *Aprendizagem de Cálculo: dificuldades e sugestões para a superação*. Atas do XIV CIAEM. Tuxtla Gutierrez, México, 2015.

PALIS, G. *A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior*. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (em CD). Salvador, BA, 2010.

REZENDE, W. M. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2003.

ROBERT, A. e SCHWARZENBERGER, R. *Research in teaching and learning Mathematics at an advanced level*. In: David Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, 1981.

SIERPINSKA, A. *On understanding the notion of function*. In: DUBINSKY, E; HAREL, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, 1992, p.25-58.

TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1992.