

## REGISTROS FIGURAIS EM UMA ATIVIDADE DE GEOMETRIA: INFLUÊNCIA NA APREENSÃO OPERATÓRIA

*Carla Larissa Halum Rodrigues*  
UNESPAR- Campus de Campo Mourão  
*carlahalum@gmail.com*

*Mariana Moran*  
UNESPAR- Campus de Campo Mourão  
*marianamorabar@gmail.com*

### **Resumo:**

Este trabalho visa investigar a influência do Material Manipulável (MM), do *Software* de Geometria (SG) e da Expressão Gráfica (EG) como registros figurais nas apreensões operatórias de figuras geométricas. As referidas apreensões foram investigadas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Para esta investigação, realizou-se a aplicação de uma atividade com 8 licenciandos do 3º e 4º anos de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – *Campus* de Campo Mourão. Com este trabalho foi possível identificar e analisar as apreensões operatórias suscitadas por meio do uso do MM, do SG e da EG durante a resolução de problemas de geometria, constatando-se que a diversidade de registros figurais contribuiu para a visualização de conceitos e propriedades dos objetos geométricos, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio.

**Palavras-chave:** Apreensão operatória; Geometria; Registros figurais;

### **1. Introdução**

A presente proposta consiste em investigar as apreensões operatórias nos registros figurais na forma de Material Manipulável (MM), de *Software* de Geometria (SG) e da Expressão Gráfica (EG), bem como investigar a exploração heurística.

As apreensões operatórias foram estudadas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e dizem respeito às possíveis modificações que podem ser realizadas em registros figurais com o intuito de resolver um problema de geometria.

A importância em investigar as apreensões operatórias dos registros figurais é justificada pelo fato de que no trabalho com a representação geométrica a análise de suas figuras e os tratamentos realizados são fundamentais para a construção do conhecimento dos conteúdos envolvidos.

A pesquisa foi norteadada pela seguinte questão: *como o Material Manipulável, o Software GeoGebra e a Expressão Gráfica influenciam nas apreensões operatórias de figuras em uma atividade de Geometria com alunos de licenciatura em matemática?*

## 2. Registros de Representação Semiótica em Geometria

Duval (2012b) afirma que para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, este deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose<sup>1</sup>: a formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado; o tratamento e a conversão.

A possibilidade de efetuar tratamento sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Neste sentido, com esse trabalho, pretende-se demonstrar que a possibilidade de efetuar tratamentos pode depender do tipo de registro figural que será utilizado em um contexto de resolução das atividades.

A existência de vários tipos de representação apresenta vantagens, que Duval (2012b) as estabelece como: economia de tratamento; a complementaridade de registros; conceitualização que implica a coordenação dos registros de representação.

Neste trabalho, considera-se como registros de representação semiótica em geometria os registros figurais representados por figuras geométricas por meio de Materiais Manipuláveis (MM), de construções figurais no *software* GeoGebra (SG) e de Expressões Gráficas (EG). Estas três formas de representar as figuras possibilitam realizar operações nas figuras.

O Material Manipulável proporciona interesse pelo sujeito, pois é um registro que pode ser manuseado, possibilitando ao sujeito construir sua própria aprendizagem. Segundo Passos (2006, p. 78) “os materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa”. Porém o contato com o MM não garante a aprendizagem, para que ela aconteça é necessária a reflexão do sujeito sobre a atividade, de modo a construir o seu conhecimento.

Uma outra forma de representar as figuras, além dos MM, é por meio dos *softwares* geométricos. Opta-se como registro figural pelo *software* GeoGebra, porque ele pode ser utilizado para representar figuras geométricas e “utilizando *software*, confere às figuras uma

<sup>1</sup> a apreensão ou a produção de uma representação semiótica.

confiabilidade e uma objetividade que permitem efetuar verificações e observações” (DUVAL, 2011, p. 84).

Além do MM e do SG, outra forma muito utilizada para representar as figuras é por meio da Expressão Gráfica. Considera-se neste trabalho a Expressão Gráfica como imagens construídas, por meio de régua, compasso, lápis etc., no papel sulfite que formam figuras passíveis de comunicar uma ideia, um conceito. Para Góes ela “pode auxiliar na solução de problemas, na transmissão de ideias, de concepções e de pontos de vista relacionados a tais conceitos” (2012, p. 53).

Nota-se que, em cada situação, seja com os Materiais Manipuláveis, *Softwares* de Geometria ou com as Expressões Gráficas, o sujeito por meio de seu conhecimento pode realizar operações na figura buscando chegar a uma resolução num contexto de uma atividade.

### 3. Aprecensão Operatória de Figuras

A figura possibilita ao sujeito realizar interpretações. Para essas interpretações Duval (2012a) distingue quatro maneiras de apreensões figurais: sequencial, perceptiva, operatória e discursiva.

A respeito da apreensão operatória de figuras, a que será alvo de estudos no presente trabalho, Duval afirma que esta “é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura e nas reorganizações possíveis destas modificações” de forma a contribuir para resolução de algum problema de matemática proposto (2012a, p. 125). Estas modificações são subdivididas por Duval (2012a) do seguinte modo:

- modificação mereológica: dividir uma figura em várias subfiguras; incluir uma figura em outra figura a fim dela se tornar uma subfigura, ou seja, esse tipo de modificação ocorre em função da relação parte e todo;
- modificação ótica: aumentar, diminuir ou até mesmo deformar uma figura transformando-a em outra de modo que esta seja sua imagem;
- modificação posicional: deslocar, rotacionar, refletir a figura com relação ao campo de referência em que ela se encontra.

Neste trabalho, será abordado principalmente, a modificação mereológica, pois ela permite a aplicação da operação de reconfiguração intermediária possibilitando a *produtividade*

*heurística* da figura na resolução de problemas de geometria. O fracionamento que acontece na figura juntamente com sua reorganização é o que origina a operação de reconfiguração intermediária.

Ao trabalhar com tais operações em registros figurais é possível, e muitas vezes necessário, associá-las a raciocínios dedutivos que podem ser expressos por meio de tratamentos matemáticos, ou seja, explorar uma figura de acordo com suas possibilidades heurísticas.

Nesse sentido, Duval (2012a) aborda que “a produtividade heurística de uma figura, em um problema de geometria, está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto” (DUVAL, 2012a, p. 125).

Ao resolver o problema em diferentes registros o aluno deverá explorar heurísticamente a figura, ou seja, realizar tratamentos que podem direcionar ao raciocínio dedutivo. Contudo, a maneira de interpretar o problema é de fundamental importância para a sua resolução correta e para aprendizagem da matemática.

#### 4. Procedimentos metodológicos

Primeiramente, foi realizado uma revisão bibliográfica sobre parte da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Em seguida, foi estudado sobre os Materiais Manipuláveis, alguns recursos do *Software* GeoGebra e o uso das Expressões Gráficas para a resolução da atividade.

A atividade foi aplicada individualmente com oito licenciandos dos 3º e 4º anos de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – *Campus* de Campo Mourão, sendo 4 alunos do 3º ano e 4 alunos do 4º ano, que foram convidados e aceitaram participar da pesquisa. As turmas foram escolhidas pelo fato dos licenciandos em matemática já terem cursado a disciplina de Geometria.

Para aplicação da atividade foram construídos os registros figurais na forma de EG, MM e SG e os oito alunos foram divididos em dois grupos contendo quatro alunos em cada e para cada grupo foi apresentada uma sequência diferente dos registros figurais sendo: o Grupo 1 com a sequência {EG, SG, MM}; o Grupo 2 com a sequência {SG, MM, EG}.

A pesquisadora iniciou a aplicação, disponibilizando o problema com o enunciado digitado em uma folha com espaço para as resoluções e os materiais necessários para a resolução dos problemas, explicando que a atividade seria resolvida por meio de uma sequência três registros figurais já definidos.

Deste modo, cada licenciando tentava resolver a atividade por determinado registro e descrevia a sua resolução, em seguida tentava resolver a mesma atividade por meio de outro registro que lhe foi disponibilizado e descrevia a sua resolução, assim sucessivamente, totalizando três registros figurais.

Cabe ressaltar que independente do aluno conseguir ou não resolver a atividade em determinado registro, o próximo registro foi apresentado de modo a investigar se a atividade seria resolvida ou se as ideias com o segundo registro seriam diferentes das ideias do primeiro registro, assim sucessivamente até o terceiro registro disponibilizado.

A coleta de dados foi efetuada com base nas resoluções escritas dos estudantes e gravações de áudio das falas durante a aplicação. Na análise, os alunos foram indicados por A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 e foram consideradas as resoluções escritas e as transcrições de áudio. As seguintes observações nortearam a análise dos dados quanto a identificar a apreensão operatória das figuras:

- se foram realizadas modificações (mereológicas, posicionais e óticas) e reorganizações com o intuito de resolver o problema. Se houve modificações, identificar o(s) tipo(s);
- se houve possibilidade de exploração heurística da figura (congruência entre os tratamentos e o raciocínio dedutivo);

## 5. Atividade:

O problema de Euclides: mostrar a igualdade das áreas 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento  $\overline{AB}$  (DUVAL, 1999, p.157).

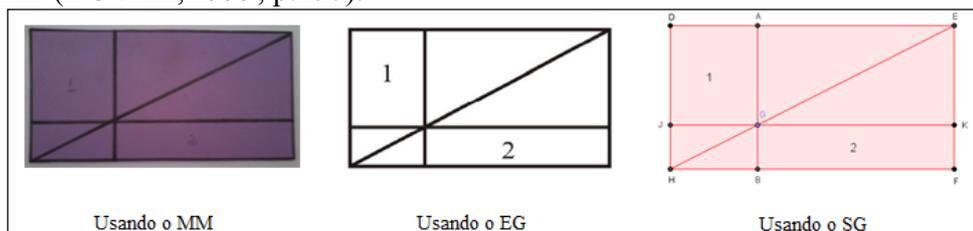


Figura 1: Imagens dos registros de representação  
Fonte: Duval (2012b, p. 129) e Autora.

Esta atividade pode ser resolvida por uma modificação figural do tipo mereológica, fazendo-se uma operação de reconfiguração, que consiste no fracionamento da figura inicial em subfiguras e na modificação das subfiguras estabelecidas em uma figura. Nesse caso, por congruência entre os triângulos  $G\hat{A}E \equiv E\hat{K}G$  e entre  $H\hat{J}G \equiv G\hat{B}H$ , conclui-se a igualdade das áreas 1 e 2.

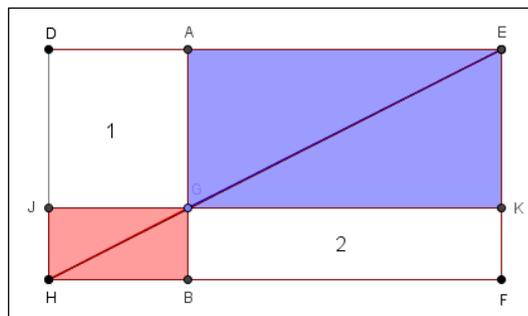


Figura 2: Segunda solução da Atividade  
Fonte: Autora.

## 6. Análise da atividade

Nesta atividade analisou-se as modificações operatórias realizadas na figura nos diferentes registros figurais: Materiais Manipuláveis (MM), Software GeoGebra (SG) e Expressão Gráfica (EG), ou seja, se no momento de resolução da atividade ocorreram as seguintes modificações operatórias: modificação mereológica, modificação ótica e modificação posicional.

As análises foram realizadas por grupos e a ordem dos registros figurais foi alternada em cada grupo de alunos, de modo a permitir que os dados para a análise fossem mais consistentes. Além disso, para as análises usou-se para as falas fonte em itálico e para as escritas dos alunos fonte comum com aspas.

### *Grupo 1 (EG → SG → MM)*

O Grupo 1 é composto por quatro licenciandos de matemática designados por A1, A2, A5 e A6, sendo A1, A2 do 3º ano e A5, A6 do 4º ano. Estes alunos realizaram a atividade na seguinte sequência de registros figurais {EG, SG, MM}.

Ao disponibilizar o registro figural na EG observou-se que os alunos A1 e A5 perceberam que as subfiguras constituídas pelo fracionamento do retângulo maior, tratam-se de seis subfiguras, sendo dois triângulos maiores, dois triângulos menores e dois retângulos.

Assim, se os triângulos são iguais entre si, então há igualdade entre as áreas dos quadriláteros 1 e 2, de modo a totalizar a área da figura de partida, conforme a figura 3.

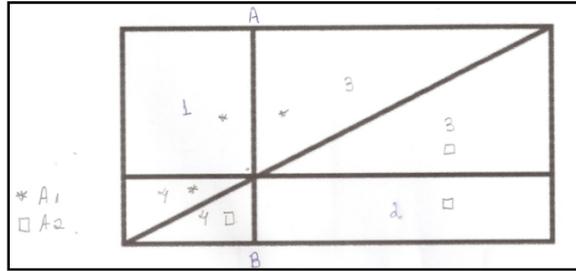


Figura 3: Resolução da atividade do aluno A1.

Fonte: Autora.

Deste modo, na EG os alunos A1 e A5 realizaram uma exploração heurística da figura por meio da modificação mereológica, como se pode confirmar no diálogo de A1 com a pesquisadora:

A1: *Meu Deus! A única coisa que eu consigo observar, assim, é que essa área aqui toda é equivalente a essa.*

Pesquisadora: *Por causa da diagonal?*

A1: *Isso. Por que a gente tem um retângulo, né, e a diagonal está dividindo em duas partes exatamente iguais, né?*

Pesquisadora: *Isso.*

A1: *Ah consegui! Eu acho, aqui, oh! Então essa daqui vou chamar de três, é igual a essa, e essa daqui é igual a essa, então tudo isso somando as áreas dois, três e quatro é igual a um, quatro, três, então se três é igual a três e quatro igual a quatro, um é igual a dois.*

Ainda, neste registro os alunos A2 e A6 deslocaram os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{JK}$  (o segmento  $\overline{AB}$  tem seus extremos um de cada lado maior do retângulo e o segmento  $\overline{JK}$  tem seus extremos um de cada lado menor do retângulo), movimentando o ponto G (ponto de interseção dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{JK}$ ) e perceberam que as áreas das subfiguras aumentavam e diminuavam proporcionalmente. O aluno A5 relatou isto oralmente. Deste modo, os alunos realizaram modificações óticas e posicionais nas subfiguras.

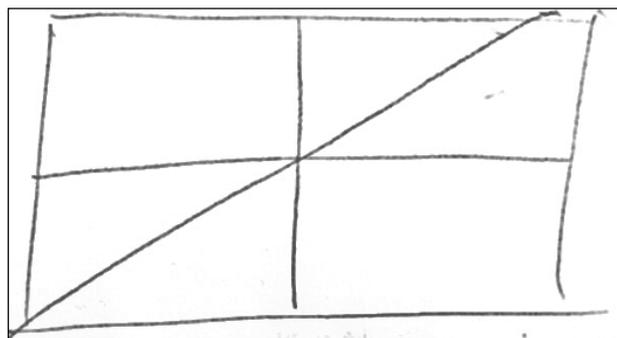


Figura 4: Resolução da atividade do A2.

Fonte: Autora.

No registro do SG, os quatros alunos, A1, A2, A5 e A6 aumentaram e diminuíram as subfiguras movimentando o ponto G (interseção entre os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{JK}$ ). Deste modo, todos os alunos fizeram modificações posicionais e óticas na figura no momento em que movimentavam o segmento  $\overline{AB}$  para observar as mudanças que ocorriam. É interessante destacar que tais modificações já haviam sido feitas, pelos alunos A2, A5 e A6, no registro da EG. Porém, nesse registro, os alunos A2 e A6 observaram que no ponto médio da diagonal da figura de partida formam-se quatro retângulos de áreas iguais, e assim comparando-os concluíram visualmente que a área 1 e a área 2 podiam ser iguais. Como pode ser observado na figura 6.

No registro na forma de SG também observou-se que de acordo com a posição do segmento  $\overline{AB}$  na diagonal do retângulo, era possível visualizar as subfiguras contidas na figura de partida com mais facilidade do que no registro anterior (EG). Neste sentido, Duval (2012b) explica que existem fatores internos à figura que disparam ou inibem a visibilidade de operações que modificam a figura, e um deles é o fracionamento da figura em partes elementares.

No MM os alunos A1, A2 e A5 dobraram e recortaram a área 2 na tentativa de encaixá-la na área 1, ou seja, fracionaram a área 2 em outras subfiguras para sobrepô-las na área 1, assim, verificaram empiricamente a igualdade das áreas. Deste modo, podemos notar que os alunos realizaram a operação de reconfiguração. Como relata A1:

*A1: Eu iria fazer assim, não sei se ia dar certo. Cortei o retângulo da área 2 no caso. Eu iria dobrar aqui, cortar no meio e tentar encaixar aqui.*

O aluno A6 primeiramente, dividiu a área 2 em duas subfiguras (retângulos), sobrepôs na área 1, mas não deu a mesma área, rotacionou as subfiguras, mas mesmo assim não deu a mesma área. Depois dividiu a área 1 em triângulos e a área 2 em trapézios e triângulos, e sobrepôs as subfiguras da área 2 nas subfiguras da área 1, concluindo que ambas possuíam a mesma área.



Figura 5: Resolução da atividade do aluno A6.  
Fonte: Autora.

Esse registro possibilitou modificações mereológicas, pois as subfiguras extraídas apresentaram formatos diferentes da figura de partida e entre si, e modificações posicionais da figura na tentativa de encaixá-las. Neste registro não houve modificação ótica realizada pelos participantes. Neste grupo, os participantes associaram os tratamentos realizados no MM a um raciocínio dedutivo, sendo que este raciocínio não é válido para resolver a atividade, pois esta forma de tratamento permite concluir a atividade para uma posição particular do segmento  $\overline{AB}$ .

Nesta aplicação, percebeu-se que ao trabalhar com Materiais Manipuláveis, alguns alunos tomam a percepção visual como prova e resolução para o problema e isto é errôneo, pois na matemática são necessárias provas lógico-dedutivas de modo que o material seja utilizado como forma de apoio para que conclusões matemáticas possam ser extraídas a partir das experiências realizadas. Deste modo, a operação de dobrar, recortar e sobrepor não é suficiente para provar matematicamente a igualdade entre as áreas 1 e 2 em qualquer posição do segmento  $\overline{AB}$ , conforme solicitado no enunciado da atividade.

#### *Grupo 2 (SG → MM → EG)*

O Grupo 2 é composto por quatro licenciandos de matemática designados por A3, A4, A7 e A8, sendo A3, A4 do 3º ano e A7, A8 do 4º ano. Estes alunos realizaram a atividade na seguinte sequência de registros figurais {SG, MM, EG}.

Com o SG, os alunos A3 e A8 realizaram uma operação de reconfiguração, ou seja, reconheceram as subfiguras e a partir delas realizaram um raciocínio dedutivo concluindo a igualdade entre as áreas 1 e 2, e conseqüentemente a atividade. Como relata A3 e como descreve A8:

*A3: A diagonal está dividida em partes iguais, então se eu olhar para esses dois triângulos, eu tenho que olhar para esses daqui também. Parece sim, que isso, daí é isso, esse aqui está menor, mas está mais largo, aqui está comprido e mais fino.*

A8: “Independente de onde estiver o segmento  $\overline{AB}$  sempre haverá quatro retângulos semelhantes e subtraindo as áreas dos quatro triângulos então vou obter a área 1 e 2, logo essas áreas são iguais”.

Neste caso, o SG possibilitou que os alunos A3 e A8 explorassem heurísticamente a figura. No SG, para o A4, as áreas são iguais quando A se posicionar como ponto médio de  $\overline{DE}$  e B ponto médio de  $\overline{HF}$ , desse modo, A4 fez somente comprovações particulares e empíricas, como pode ser observado na figura 6.

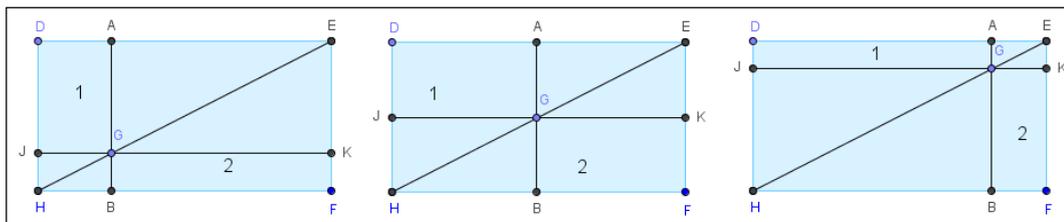


Figura 6: Modificações óticas e posicionais no retângulo

Fonte: Autora.

Para Kawasaki “um *software* matemático adequado, possibilita a visualização dinâmica e interativa de um objeto matemático virtual que, dependendo do ambiente, pode ser alterado, deslocado e rotacionado” (2008, p.45). Neste caso, o GeoGebra se demonstrou um *software* matemático adequado para o trabalho com a geometria, como observa-se na interação dos alunos com o GeoGebra ao buscarem alternativas para resolução desta atividade.

Em seguida, ao se disponibilizar a mesma figura no MM, o aluno A4 observou as subfiguras, tentou provar a semelhança entre os triângulos utilizando o *registro algébrico* e não obteve êxito, porém no momento de anotar a resposta A4 descreve:

A4: “As áreas são iguais devido à semelhança de triângulos distribuídas através da diagonal principal do retângulo maior”.

O aluno A7 recortou as áreas 1 e 2, ou seja, efetuou modificações mereológicas e posicionais com as subfiguras obtidas, sobrepondo a área 2 na área 1, mas não chegou a igualdade das áreas.

Os alunos A3 e A8 chegaram a mesma conclusão do registro SG, sem novidades, pois exploraram heurísticamente a figura obtendo a resolução da atividade. Neste registro, os alunos A4 e A7 efetuaram operações de reconfiguração congruente ao raciocínio dedutivo, neste caso, houve uma exploração heurística da figura.

Na EG, o aluno A7 realizou a operação de reconfiguração intermediária associada ao raciocínio dedutivo e concluiu a igualdade entre as áreas 1 e 2. Conforme descreve A7:

A7: “Observando toda a região pude perceber que as áreas de 1 e 2 são iguais, porque os triângulos que estavam ao redor tanto da área 1 quanto os da área 2 são iguais, então as figuras que sobram ou seja as subfiguras 1 e 2 são de mesma área”.

No momento da resolução da atividade pelo registro figural na forma de EG, os alunos A4 e A8 mobilizaram outros registros: o registro algébrico e numérico, respectivamente.

## 7. Considerações finais

A análise da atividade proposta neste artigo evidencia a importância de utilizar diversos registros figurais, pois dependendo do registro apresentado os alunos manifestam procedimentos de resoluções diferentes.

O quadro 1 mostra quais registros figurais foram utilizados pelos alunos para provar dedutivamente a igualdade entre as áreas 1 e 2. Eles provaram explorando heurísticamente a figura por meio da operação de reconfiguração intermediária. Cabe ressaltar que, para esse quadro, foi considerada somente a primeira resolução correta do aluno em determinado registro figurado, ou seja, se o aluno fez a mesma resolução em um registro figurado posterior a ela, esta não foi considerada.

**Quadro 1:** Alunos que resolveram a atividade utilizando um dos registros figurais.

GRUPOS	REGISTROS FIGURAIS		
	SG	MM	EG
<b>Grupo1: A1, A2, A5 e A6.</b> (EG → SG → MM)	----	----	A1 e A5
<b>Grupo2: A3, A4, A7 e A8.</b> (SG → MM → EG)	A3 e A8	A4	A7

Fonte: Autora.

A partir deste quadro constatou-se que os registros na forma de EG e SG foram os que mais propiciaram a resolução da atividade, pois esses registros permitiram mais tentativas, já que neles podem ser realizadas operações quantas vezes forem necessárias. Com relação ao MM, como este proporciona o uso de recortes limitou-se a opção de refazer a atividade em busca de chegar até conclusões.

A modificação mereológica foi realizada nos três registros figurais apresentados e é a modificação que proporciona aos alunos a resolução da atividade. Porém esta aconteceu, principalmente, no SG e no MM.

A modificação ótica e a modificação posicional ocorreram com maior frequência por meio do registro figurado representado pelo SG, pelo fato de suas ferramentas possibilitarem de forma dinâmica essas modificações das subfiguras. Um resumo dessas informações pode ser visualizado no quadro 2, onde estão destacadas as maiores ocorrências de modificações nos registros figurais.

**Quadro 2:** O tipo de registro que mais ocorreu a modificação: mereológica, ótica e posicional.

	Modificação Mereológica	Modificação Ótica	Modificação Posicional
<b>Grupo 1 (EG → SG → MM)</b>	MM	SG	SG/MM
<b>Grupo 2 (SG → MM → EG)</b>	SG	SG	SG

Fonte: Autora.

A diversidade de registros figurais contribuiu para a visualização de conceitos e propriedades dos objetos geométricos em questão, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio, proporcionando diferentes operações e completando um registro figural ao outro.

## 8. Referências

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. **Org.:** Tânia M. M. Campos; tradução: Marlene Alves Dias. 1ed. São Paulo: PROEM, 2011.

\_\_\_\_\_. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência** (tradução: Mércles Thadeu Moretti). *Revemat*. Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012a.

\_\_\_\_\_. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** (tradução: Mércles Thadeu Moretti). *Revemat*: Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012b.

GÓES, H. C. **Expressão Gráfica:** Esboço de conceituação. 2012. 123p. Dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

PASSOS, C. L. B. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática.** In: LORENZATO, Sérgio (Org). *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

TREVIZAN, Zizi. **Contribuições da Semiótica para a Alfabetização do Olhar.** In: GEBRAN, Raimunda Abou. *Contexto Escolar e Processo Ensino-Aprendizagem: Ações e Interações*. São Paulo: Arte & Ciências, 2004. p. 149-164.