ADAPTAÇÃO DA TEORIA DE VAN HIELE PARA O TÓPICO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Eduarda de Jesus Cardoso
CAp UFRJ
eduardadjc@gmail.com

Lilian Nasser
PEMAT – IM/UFRJ
lnasser.mat@gmail.com

Resumo:
A Teoria de Van Hiele para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico tem sido considerada como guia para ensino/aprendizagem de Geometria. Este modelo consiste em dois grandes princípios: da descrição da estrutura cognitiva, que se caracteriza por níveis mentais hierárquicos a serem atingidos pelos alunos e da metodologia do ensino para que estes níveis sejam alcançados, com o intuito de orientar educadores quanto à tomada de decisão relacionada ao ensino. A partir de um estudo sobre os modelos de desenvolvimento do pensamento sobre a linguagem de funções, este trabalho tem o objetivo de propor e testar um modelo de níveis de desenvolvimento para funções com base no modelo de Van Hiele para a aprendizagem de geometria. Para isso, foram aplicadas atividades a alunos do Ensino Médio, para verificar a validade da escala proposta sobre a aquisição do conceito de função, ou seja, testar as possíveis contribuições e limitações do modelo.

Palavras-chave: função; teoria de van Hiele; níveis de aprendizagem.

1. Introdução

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática, uma vez que este tópico relaciona-se tanto com temas e conteúdos dentro da Matemática como em outras disciplinas. Segundo Pinto (2014), trata-se de um tema importante, mas que, talvez, não seja abordado na escola com a amplitude e conexão adequadas para que fique evidente o seu papel na compreensão de outros temas matemáticos e de questões de outros campos de saber.

O ensino/aprendizagem de funções vem se tornando sistematicamente motivo de grande preocupação para professores e pesquisadores, devido a dificuldades dos alunos em construir tal conceito. Isso se reflete no baixo rendimento escolar e em elevados índices de reprovação nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral em diversos cursos superiores, tornando-se um dos maiores desafios para os profissionais da Matemática (REZENDE, 2003).

Com o intuito de entender o processo ensino-aprendizagem de funções, diversas pesquisas foram realizadas, tais como as de Bergeron & Herscovics (1982), Vinner (1989), Even (1990), Sierpinska (1992), Tall (1991) e Isoda(1996). No Brasil, destacam-se os trabalhos de Rezende (2003), Trindade (1996) e Sant'Anna (2001). Estes trabalhos apontam que a aprendizagem de funções é um processo evolutivo, lento e gradual devido à sua complexidade, uma vez que existem vários tipos diferentes de representações para uma mesma função.

Muitos desses aspectos relacionados às dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções podem ser compreendidos na perspectiva dos obstáculos epistemológicos. De acordo com Sierpinska (1992, p.28), "se o obstáculo não for apenas nosso ou de algumas outras pessoas, mas for mais generalizado, ou foi generalizado em alguma época ou em alguma cultura, então ele é conhecido como um obstáculo epistemológico". A partir da perspectiva epistemológica, os obstáculos relativos à apropriação do conceito de função têm se mostrado de fundamental importância no processo de formação dos saberes dos educandos, e na elaboração de modelos de intervenção didática para o processo ensino-aprendizagem deste tópico.

Várias pesquisas em Educação Matemática apontam na direção da necessidade de uma melhor compreensão de conceitos matemáticos por parte dos alunos em tarefas que permitem a construção das definições e dos significados, por meio de procedimentos didáticos que envolvam atributos relevantes destes conceitos (TALL, 1993). Neste contexto, surge a discussão de modelos de desenvolvimento do pensamento sobre a linguagem de funções.

Autores como Dubinsky (1991), Sierpinska (1992) e Vinner (1991), propuseram tais modelos. Estes pesquisadores consideram o desenvolvimento dos alunos, não só em termos de pensamento conceitual sobre funções, mas também da linguagem dos alunos, ou seja, o problema da aprendizagem tem sua justificativa no desenvolvimento cognitivo dos alunos. Assim, o processo de elaboração mental da construção de conceitos matemáticos deve ir muito além da apresentação de sistemas dedutivos, por meio de definições, exemplos e contra-exemplos.

Este trabalho relata uma pesquisa de mestrado, que sugere uma escala de níveis para a aprendizagem de funções, baseada na teoria de van Hiele, que afirma que o progresso nos níveis depende do ensino, e não apenas da maturidade dos educandos.

2. Teoria de van Hiele

Os educadores holandeses Dina van Hiele-Geldof e seu marido Pierre Marie van Hiele desenvolveram um estudo de pensamento geométrico que resultou nas teses de doutorado do casal na Universidade de Utrecht. Esses estudos apontaram que: a aprendizagem de geometria ocorre em níveis hierárquicos de conhecimento; quando o ensinamento ocorre em um nível cognitivo acima do qual o aluno se encontra os conceitos não são compreendidos e fixados; o crescimento relativo à idade não produz automaticamente um crescimento no nível do pensamento geométrico. A teoria proposta consiste de cinco níveis de compreensão de ideias geométricas, onde o aluno avança de nível a partir de sua maturidade geométrica.

Níveis de Compreensão Geométrica

O casal van Hiele sugeriu cinco níveis de desenvolvimento da compreensão em geometria descritos por Shaughnessy e Burger (1985, p.420) como: Nível 0 - Visualização; Nível 1 - Análise; Nível 2 - Dedução Informal; Nível 3 - Dedução Formal; e Nível 4 –Rigor.

Estes níveis explicam como se produz o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes. De acordo com Nasser (1992), a teoria sugere que os alunos progridem através de uma sequência hierárquica de níveis de compreensão enquanto aprendem Geometria, e que a linguagem, o insight e o tipo de experiências vivenciadas desempenham papeis essenciais nesse desenvolvimento.

Em resumo, os objetos (ideias) devem ser criados em um nível para que as relações entre esses objetos possam se tornar o foco do próximo nível. Desta forma, o modelo afirma que o aluno move-se sequencialmente a partir do nível inicial até o nível mais elevado, não havendo como "pular" de nível. Além de fornecerem uma compreensão daquilo que há de específico em cada nível de pensamento geométrico, os Van Hiele identificaram algumas propriedades que caracterizam o modelo, bem como definiram uma metodologia específica para o avanço de níveis.

3. Modelos de desenvolvimento do pensamento sobre a linguagem de funções

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática, uma vez que este tópico se relaciona tanto com temas e conteúdos dentro da Matemática como com outras disciplinas. Devido à grande abrangência do conceito, o tópico envolve múltiplas concepções e representações, portanto, faz-se necessário compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos. Estas múltiplas representações, quando desenvolvidas de forma articulada, levam a uma melhor compreensão. Visando auxiliar aos alunos na aquisição deste tópico, surgem modelos construtivistas que ajudam o aluno a construir o conceito de função de forma gradativa e abrangente. Tais modelos foram desenvolvidos com o objetivo de superar alguns obstáculos epistemológicos. A seguir, descrevemos pesquisas que propõem níveis de desenvolvimento para a aprendizagem de funções.

A pesquisa de Isoda (1996)

Este modelo de desenvolvimento de linguagem de funções foi criado comparando as práticas de ensino japonês e currículo nacional japonês com formas generalizadas dos Níveis de van Hiele. O estudo de Isoda utiliza a estrutura dos níveis de compreensão geométrica e mostra que eles também podem indicar características para a linguagem de funções. Estas características incluem: hierarquia da linguagem, dualidade de objeto e método, linguagem matemática e contextualização do pensamento dos alunos (ISODA, 1996 p. 105). Através de investigações sobre o desenvolvimento da linguagem dos alunos para descrever funções e sua origem histórica, os níveis de compreensão foram elaborados tomando como base os níveis de compreensão geométrica.

Nível 1 - Linguagem Cotidiana: Os alunos raciocinam basicamente por meio de especulações, através da linguagem cotidiana, os conceitos de funções são vistos como um todo, não sendo levadas em conta considerações explícitas das propriedades dos seus componentes. Com isso, discutem alterações numéricas através de resultados observados em cálculos simples e/ou calculadoras, normalmente suas descrições são feitas com base em uma variável fisicamente evidente, a variável dependente. Mesmo estando conscientes das diferenças numéricas, é difícil explicá-las adequadamente usando duas variáveis, uma vez que suas observações são feitas verbalmente, usando uma linguagem cotidiana.

Nível 2 – Aritmética: Neste nível inicia-se uma análise informal dos estudos de funções através do uso de aritmética e tabelas. Ao explorarem as tabelas, os alunos descrevem as regras de relações, suas conclusões sobre as relações dos fenômenos são mais precisas com as tabelas do que com a única linguagem cotidiana do Nível 1. Apesar de conseguirem descrever as relações, não é fácil traduzir para notações.

Nível 3 - Álgebra e Geometria: Os alunos conseguem estabelecer interrelações entre a lei de formação das funções e seus gráficos, convertem as notações de tabelas, equações e gráficos através de álgebra e geometria. Neste nível, sua noção de função está bem evoluída, envolve a representação em diferentes notações.

Nível 4 – Cálculo: Os alunos desenvolvem o estudo das funções a partir de conhecimentos de cálculo, como limite, derivada e integral.

Nível 5 – Análise: Um exemplo de linguagem para a descrição é a análise funcional, que é uma metateoria do cálculo. A justificação deste nível é baseada no desenvolvimento histórico e ainda não foi investigada.

Modelo proposto por Bergeron & Herscovics (1982)

Os pesquisadores Jacques C. Bergeron e Nicolas Herscovics desenvolveram um esquema para o ensino de funções. Neste modelo, os pesquisadores basearam-se nos obstáculos cognitivos estudados anteriormente. Bergeron & Herscovics (1982) usaramuma abordagem construtivista, partindo da intuição dos alunos para a formalização, onde cada nível foi construído sobre o anterior. Os níveis são descritos como:

Compreensão Intuitiva: pensamento com base na percepção visual e ações primitivas não quantificadas, resultando em aproximações.

Matematização Inicial: organização e quantificação das primeiras noções intuitivas para a construção de um conceito.

Abstração: o conceito se destaca do procedimento e alcança uma existência própria, com generalizações.

Formalização: uso da linguagem simbólica, justificação lógica das operações, descontextualização e descoberta dos axiomas.

4. Proposta de modelo de níveis de desenvolvimento para funções baseado em van Hiele

Com base nos níveis de van Hiele e nas outras referências estudadas, nossa pesquisa propõe um modelo próprio para o desenvolvimento do pensamento de funções. Para a validação da escala proposta foram aplicados dois testes durante o ano de 2015 com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola particular, e uma atividade, com os mesmo alunos dos primeiros testes e alunos do primeiro e segundo ano do CAp UERJ, e alunos do terceiro ano do curso de eletrônica do CEFET-RJ.

Considerando os resultados obtidos e os modelos de níveis para funções das pesquisas de Isoda (1996) e Bergeron & Hercovics (1982), sugerimos a seguinte classificação para o desenvolvimento do pensamento de funções para alunos do Ensino Médio:

- Nível 1: É um pré-conceito de função. Reconhecimento das variáveis dependente e independente, estabelecimento de esquemas visuais (gráfico ponto a ponto) e tabelas. Noções não formais de variação (temperatura, dependência...)

- Nível 2: Reconhecimento do domínio e contradomínio, marcação de pares ordenados a partir da expressão algébrica de uma função. Uso da notação $y = f(x)$.

Quadro 1: Atividade de validação dos níveis 1, 2 e 3

- Nível 3: Identificação da expressão analítica da função, distinção entre equação e função, construção e interpretação de gráficos.

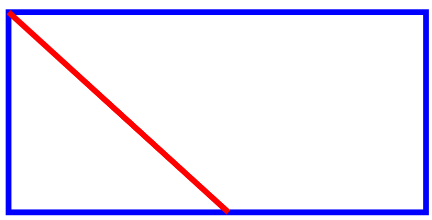
- Nível 4: Reconhecimento de funções injetoras, sobrejetoras, pares e ímpares , operações com funções, relação entre funções.

Após a definição dos níveis de desenvolvimento para o conceito de função, era preciso validar essa escala, ou seja, verificar se eram de fato hierárquicos, e descrever o desempenho de sujeitos em cada nível. Foi então elaborada uma sequência de atividades para a coleta de dados, aplicadas inicialmente com alunos do Ensino Médio de uma escola privada do Rio de Janeiro. Foram convidados os 14 alunos do 3º ano, dos quais apenas 6 concordaram em participar voluntariamente. Infelizmente, estes alunos não alcançaram todos os níveis da escala proposta, o que nos levou a aumentar a amostra.

Para isso, desenvolvemos uma sequência didática, para ser aplicada a uma amostra bem mais ampla de alunos de Ensino Médio. Esta nova amostra foi composta pelos 6 alunos da escola particular inicial, 12 alunos do Colégio de Aplicação da UERJ, sendo 6 do primeiro ano e 6 do segundo ano, e 13 alunos do terceiro ano do curso de eletrônica da CEFET-RJ. Com essa amostra foi possível validar a hierarquia dos níveis propostos para o conceito de função, já que havia alunos raciocinando nos quatro níveis.

A atividade a seguir foi aplicada na pesquisa para validar os três primeiros níveis da escala proposta, o nível 4 foi testado em outra atividade, descrita mais adiante.

O dono de um sítio, de forma retangular de dimensões 4 m por 8 m, divide seu terreno de modo a poder criar galinhas e cultivar hortaliças durante o ano todo. Para isso, ele fixou uma estaca num dos cantos do terreno (A) e ali prendeu uma das pontas de um rolo de tela, fixando a outra ponta numa estaca que fica num ponto qualquer (P) do lado oposto (CD).



Conforme a sua necessidade, durante o ano, ele varia a localização desta ponta da tela que é móvel, ou seja, a do ponto P, sempre sobre CD. O retângulo, ao lado, representa a situação da divisão das regiões de utilização do sítio. O terreno da horta tem o formato de um triângulo retângulo. Lembre-se que a área de um triângulo é expressa por: $A = \frac{b.h}{2}$

A seguir, descrevemos os itens, com respostas características de cada nível. Os três primeiros itens poderiam ser respondidos no nível 1:

a) Desenhe, no retângulo, a região da horta ADP para o caso em que **P** esteja a 3 m do ponto D. Pinte esta região.

b) Qual a área da horta com essas dimensões?

c) Represente a distância de **D** a **P** pela letra **d** e execute as instruções acima para os valores escritos na tabela:

Distância d (m)	Expressão da área da horta	Área da horta (m^2)
0,5 m		
1,2 m		
5,5 m		

Sugestão: Represente a horta para cada valor de d no retângulo desenhado no item a.

Todos os alunos da amostra responderam corretamente as questões de nível 1, o que significa, que não havia alunos classificados abaixo do primeiro nível. Tal fato se deve à atividade ter sido aplicada com alunos de Ensino Médio no mês de dezembro, quando todos os estudantes já haviam estudado funções, inclusive os que estavam no 1º ano do Ensino Médio.

Com relação aos itens (a) e (b) não há nada significativo a comentar, já no item (c), uma aluna utilizou a variável *x* ao lado de cada valor de *d*, o que indica a forte influência da notação *f(x)*. Esta aluna foi classificada como nível 1.

Os itens (d), (e) e (f) já exigiam raciocínio no nível 2:

d) Pode-se construir hortas no formado indicado para os seguintes valores de **d**?

d = 0,1m; d = 0m; d = 8m; d = $\sqrt{2}$ **m**

e) Quais os valores inteiros que **d** pode assumir? Quais os valores que **d** pode assumir?

f) A área da horta depende do valor de **d? ** Justifique

No geral, os alunos acertaram os itens (d) e (f). O problema encontrado no item (d) foi com relação às opções de valores d = 0 e d = $\sqrt{2}$, alguns poucos alunos, consideram que poderia haver medida d=0, enquanto outros poucos estudantes, acharam

Quadro 4: Atividade de validação do nível 3

que devido ao fato de $\sqrt{2}$ ser um número irracional, não poderia existir essa medida para d. No item (e), alguns alunos de nível 1completaram com um não a segunda questão, dessa forma a pergunta ficou quais valores *d* não pode assumir. Tal pensamento é característico de nível 1, uma vez que estes estudantes interpretaram como quais os valores dentre os apresentados na letra anterior não poderiam ser possíveis. Alunos no nível 1 identificam as variáveis da função, entretanto, ainda não conseguem identificar os possíveis valores contínuos ou discretos do domínio. A distinção de domínio discreto/contínuo é característica de alunos no nível 2.

As respostas aos últimos itens demandam raciocínio no nível 3 da escala:

g) Qual o valor de **d** correspondente à horta de maior área?
h) Dê uma expressão para a área da horta ADP em função de **d**.
i) Esboce o gráfico que representa a situação descrita pelo problema.
j) Qual a posição do ponto **P** para que a área da horta seja 5 m^2? E 7,4 m^2?
k) Qual a posição do ponto **P** para que a área da horta 5 m^2? E 7,4 m^2?
l) A área da horta **ADP** aumenta ou diminui quando o ponto **P** se aproxima do ponto **C**?
m) Que função o gráfico representa?

As questões de nível 3 confirmaram que os alunos em níveis inferiores apresentam grande dificuldade em obter/transcrever as informações obtidas nas expressões analíticas para os gráficos. Assim, os itens (h) e (i) foram os itens que apresentaram maior número de erros ou de não realização por parte dos alunos de níveis inferiores.

Alguns alunos de nível inferior ao responderem o item (h) apresentaram como resposta a expressão $A = \frac{d\ x\ \overline{DA}}{2}$, mesmo sabendo que o valor de $\overline{DA}$ é sempre igual a 4, enquanto que alunos em nível 3 e 4 apresentaram como expressão $A(d) = 2d$.

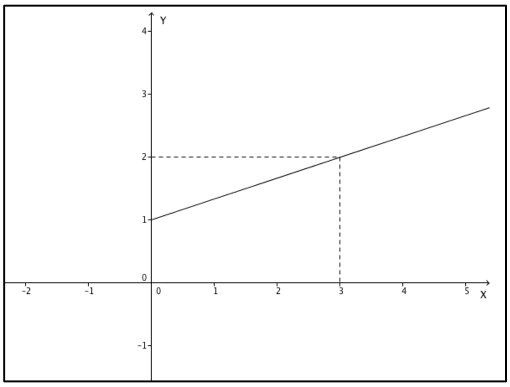
A seguinte atividade, adaptada de Sant'Anna (2001), foi proposta para validar respostas no nível 4 da escala. Estes 4 itens foram classificados no Nível 4 da escala, pois tinham como objetivo verificar se o aluno é capaz de operar com funções, perceber

Quadro 5: Atividade de validação do nível 4

a simetria das funções pares em relação ao eixo vertical e tirar conclusões a partir das definições dadas.

Uma função f é par se e somente se $f(x) = f(-x)$ para todo x de seu domínio.
Uma função f é ímpar se e somente se $f(x) = -f(-x)$ para todo x de seu domínio.
Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par e a função $g(x) = x^3$ é ímpar.

A figura ao lado mostra um pedaço do gráfico de uma função $f : R \to R$.



Esboce um complemento para o gráfico de f, à esquerda do eixo vertical supondo que f seja par.

Considere, agora, a função h definida por:

$$h(x) = f(x) + f(-x).$$

Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.

( ) Se f é uma função par e $f(x)$ é um número inteiro, então $h(x)$ é um número par.
( ) Se $h(x)$ é um número par sempre que $f(x)$ for um número inteiro, então f é uma função par?
( ) Se a função f é ímpar, então $h(x) = 0$ para todo x.

A maioria dos alunos raciocinando em níveis inferiores ao terceiro nível errou pelo menos alguma delas, principalmente o item que pedia para completar o gráfico apresentado, considerando que a função dada era par. Isso ocorreu porque estes alunos não entenderam a definição de função par e ímpar, não sendo capazes de responder a estes itens, o que comprova que eles estavam num nível inferior ao 4. Por se tratar de questões de Verdadeiro ou Falso, alguns alunos de nível inferior ao 4 acertaram algumas das opções, sem justificativa, e erraram as demais, o que nos deu a entender que estes "chutaram". Os alunos que justificaram estes itens levaram e consideração a natureza de

ISSN 2178-034X

f(x), justificando que a soma de dois números pares é um número par, assim como a soma de dois números ímpares também é um número par.

5. Considerações Finais

A teoria de van Hiele para o pensamento geométrico tem servido como modelo para a elaboração de materiais escolares e de atividades geométricas, uma vez que estabelece níveis hierárquicos para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Vale lembrar que, de acordo com essa teoria, o progresso nos níveis de conhecimento depende mais do ensino que apenas da idade ou maturidade dos estudantes.

Este artigo relata uma pesquisa de mestrado, inspirada nos trabalhos desenvolvidos por Isoda (1996) Bergeron & Hercovics (1982), que descrevem níveis hierárquicos para a linguagem de funções. Trata-se de uma tentativa de aplicar um modelo, do tipo de van Hiele, para o tópico de função. Nossa pesquisa foi realizada com alunos dos três anos do Ensino Médio de escolas pública e particular no Rio de Janeiro, buscando validar uma escala de níveis pensada para a realidade brasileira.

A expectativa é que tal modelo poderia facilitar o trabalho do professor do Ensino Médio na tarefa de ajudar os alunos a construir esse conceito, com todas as suas particularidades e variedade de representações. Acreditamos que nossa proposta de níveis atende a estas necessidades e poderá contribuir efetivamente para a apropriação do saber matemático no tópico de funções por parte dos alunos.

Consideramos que o trabalho tem potencial para produzir contribuições relevantes para a pesquisa na área, uma vez que propõe-se a identificar problemas inerentes a estudantes brasileiros. A intenção do trabalho de mestrado foi elaborar e implementar atividades diversificadas para a aprendizagem de funções, verificando através dos resultados obtidos suas contribuições para a aprendizagem. Essa proposta certamente poderá contribuir para descrever o desenvolvimento da aprendizagem de funções, ajudando a entender esse fenômeno e a identificar possíveis contribuições e limitações do modelo proposto.

6. Referências

BERGERON, J. e HERCOVICS, N. *Levels in the understanding of functions concept. Proceedingsofthe Workshop ofFunctions*.Enschede, The Netherlands, 1982.

DUBINSKY, E.*Reflective abstraction in advanced Mathematical Thinking*. Em: TALL, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.1991

ISODA, M., *The Development of Language about Function: An Application of Van Hiele's Levels*. PME 20, Valencia, Espanha, vol.3, p.105-112, 1996.

NASSER, L. *Usingthe van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil.*Tese de doutorado apresentada na Universidade de Londres, 1992.

REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*, Tese de Doutorado, São Paulo: FE-USP, 2003.

REZENDE, W. M. *Um Mapeamento do Ensino de Funções Reais no Ensino Básico*, Sbem, 2006.

SANT´ANNA, N. F. P, *Aplicação da teoria de Van Hiele no acompanhamento da mudança curricular no ensino médio no colégio Pedro II*, dissertação de mestrado, PUC-Rio, 2001.

SIERPINSKA, A. *On understanding the notion of function.* In: DUBINSKY, E;

HAREL, G (Ed.) The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy. MAA Notes, 1992, p.25-58.

TALL, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.1991

VINNER, S.*The hole of definitions in the teaching and learning of Mathematics*. Em: Tall, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.1991

ISSN 2178-034X