AS CÔNICAS DE APOLÔNIO

Arianne Alves da Silva
Universidade Federal de Uberlândia
arianne@mat.pontal.ufu.br

Mirianne Andressa Silva Santos
Universidade Federal de Uberlândia
mirianneandressa@mat.pontal.ufu.br

Resumo:
Este trabalho, desenvolvido no âmbito da disciplina História da Matemática do curso de graduação em Matemática da Faculdade de Ciências Integradas do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia, tem como objetivo apresentar uma breve investigação histórica sobre as cônicas de Apolônio de Perga: parábola, hipérbole e elipse. Apresenta-se neste trabalho uma breve introdução sobre a origem das cônicas de Apolônio em seguida, são realizados o tratamento geométrico e alguns assuntos abordados em sua obra "*As Cônicas*" e algumas aplicações.
Palavras-chave: Apolônio de Perga; Parábola; Elipse; Hipérbole.

1. Introdução

Três grandes nomes da matemática, especificamente do século III a.C., são Euclides, Arquimedes e Apolônio. Este último, juntamente com seu trabalho acerca das cônicas, é o tema desse artigo. Nasceu no sul da Ásia Menor, por volta de 262 a.C., em Perga e morreu por volta de 190 a.C. (EVES, 2004).

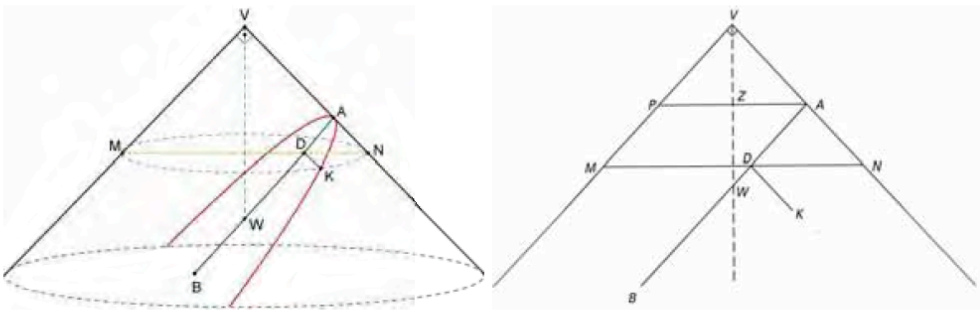
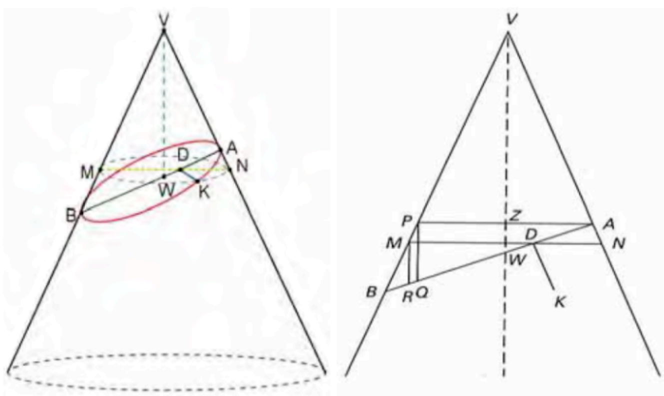
Nesse trabalho, as autoras apresentam uma breve introdução sobre a origem das cônicas de Apolônio.

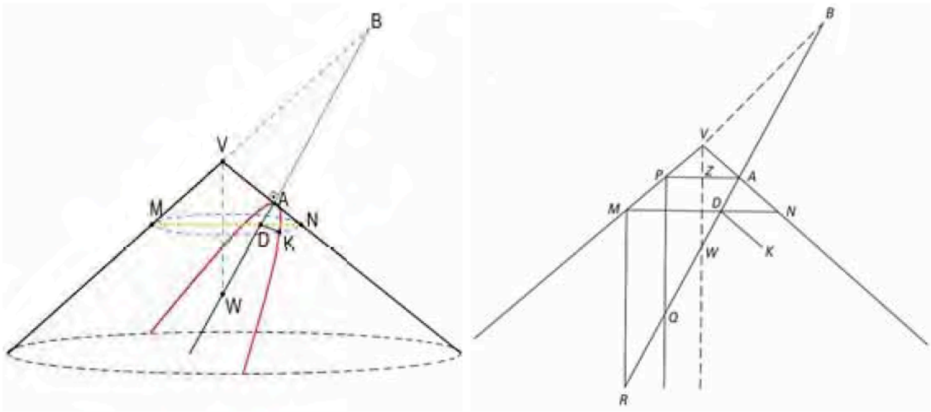
As cônicas: elipse, hipérbole e parábola têm suas exposições gerais conhecidas antes da época de Euclides (325 – 265 a.C.). A propriedade descoberta por Apolônio (aproximadamente entre os anos 262 a 190 a.C.) foi que, não é necessário realizar os cortes dos cones por planos perpendiculares à geratriz, basta variar a inclinação do plano da seção. Provou também que o cone não precisa ser reto, podendo ser oblíquo ou escaleno, pois antes de Apolônio, acreditava-se que as cônicas eram obtidas conforme o ângulo no vértice do cone fosse agudo, obtuso ou reto. E foi o responsável por substituir o cone de uma folha pelo de duas folhas; com isso, a hipérbole passou a ser entendida como uma curva de dois ramos como é determinada nos dias de hoje.

Dos muitos tratados de Apolônio, apenas dois se preservaram em grande parte, o *Dividir segundo uma razão* e *As Cônicas*. Este último composto por oito volumes com, aproximadamente 400 proposições, sendo que da sua obra original resistiram sete volumes e é considerada juntamente com *Os Elementos* de Euclides uma das maiores obras no campo das seções cônicas. Porém, este estudo de Apolônio superou o que já havia sido desenvolvido por Euclides, Aristeu e seus antecessores.

As seções cônicas antes de Apolônio eram dadas pelos cortes obtidos por um plano perpendicular a reta geratriz VN conforme mostra a tabela 1:

Tabela 1: Cônicas antes de Apolônio

Definição	***Representação geométrica***
Parábola: seção obtida no cone retângulo.	Figura 1: Parábola  Fonte: LOPES, F. J., 2011
Elipse: seção obtida no cone acutângulo.	Figura 2: Elipse  Fonte: LOPES, F. J., 2011

<table>
<tr><td>Hipérbole: seção obtida no cone obtusângulo.</td><td>Figura 3: Hipérbole

Fonte: LOPES, F. J., 2011</td></tr>
</table>

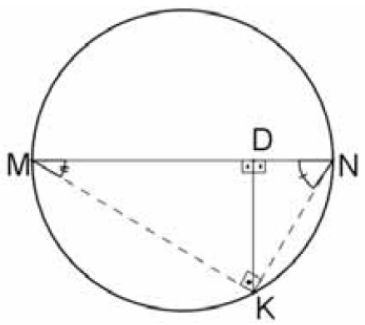
Para os três tipos de cones representados na figura conclui-se que:

$$\frac{MD}{KD} = \frac{KD}{ND}.$$

Nota-se que: AB é o corte do plano perpendicular à geratriz do cone; K é um ponto arbitrário sobre a curva obtida na intersecção do plano com o cone; e D é a projeção ortogonal de K sobre a reta que passa por AB. Desta forma temos que a reta que contém o segmento KD é perpendicular ao plano do triângulo gerador.

Considere o plano que contém o segmento KD e que seja perpendicular a VW. Este plano determinará uma seção circular cujo diâmetro será designado por MN (figuras 1, 2 e 3). Como MN está contido no plano do triângulo gerador, conclui-se que o segmento KD é perpendicular a MN no ponto D. Os pontos M, K e N determina um triângulo retângulo em K.

Figura 4: Seção circular



Fonte: LOPES, F. J., 2011.

O triângulo ΔMKN é semelhante aos triângulos ΔMDK e ΔNDK. Como os triângulos ΔMKN e ΔNDK são semelhantes, então

$$\frac{MD}{KD} = \frac{KD}{ND} \Rightarrow KD^2 = MD \cdot ND.$$

Para cada tipo de curva é possível encontrar essa relação.

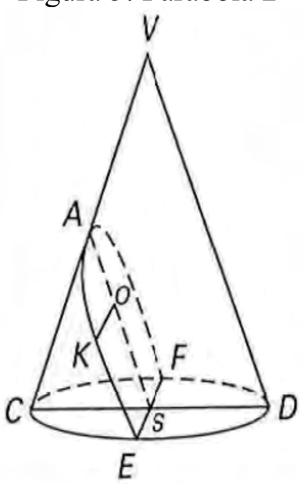
2. Definições de Apolônio

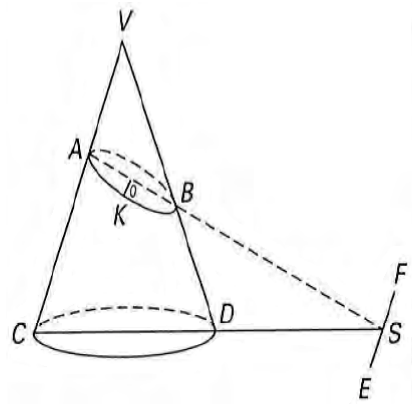
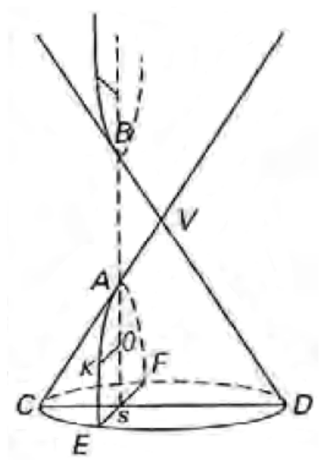
Definição. O triângulo axial é o triângulo obtido no corte do cone a partir do vértice em seu eixo por um plano, e na figura 5 é denotado por ΔVCD.

Definição. O diâmetro da base do cone é a interseção da base com o plano com o qual o cone foi cortado, e está representado na figura 5 por CD.

A parábola, a elipse e a hipérbole são definidas como as interseções dos planos que cortam o segmento CD (diâmetro) ou seu prolongamento sobre uma reta EF com o cone. A reta AS é a interseção dos cortes do plano com o triangulo axial. Dessa forma, com relação a esse método obtemos:

Tabela 2: Cônicas de Apolônio

Definição	***Representação geométrica***
Parábola: caso em que AS é paralelo ao lado do triângulo axial. O nome "parábola" vem do grego *paraboli*, que significa aproximação sem falta ou excesso.	Figura 5: Parábola 2  Fonte: LOPES, F. J., 2011.

Elipse: caso em que AS intersecciona dois lados do triângulo axial. O termo “elipse” foi originado do grego *ellipis*, que corresponde a aplicação de áreas por falta.	Figura 6: Elipse 2  Fonte: LOPES, F. J., 2011.
Hipérbole: caso em que AS intersecciona dois lados do triângulo axial e o prolongamento do outro lado oposto ao vértice V. O termo “hipérbole” foi originado do grego *yperboli*, isto é, uma aplicação de áreas por excesso.	Figura 7: Hipérbole 2  Fonte: LOPES, F. J., 2011.

3. As Cônicas

A obra *As Cônicas* de Apolônio apresenta várias descobertas relevantes, mas não nos cabe explicitar todos elas de forma completa então nos deteremos a citar algumas delas mostrando em qual dos oito volumes foi retratada.

No livro I e II, o autor desenvolveu a teoria dos diâmetros conjugados onde mostrou que os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse ou hipérbole formarão um segundo diâmetro, os dois sendo chamados “diâmetros conjugados”. Tais diâmetros conjugados desempenham o papel dos eixos perpendiculares entre si que referimos a uma cônica. Apolônio conhecia as propriedades da hipérbole referida às assíntotas como eixos, para a hipérbole equilátera.

No terceiro livro apresentou teoremas sobre síntese de lugares sólidos e determinação de limites onde apresentou uma teoria sobre o lugar de três e quatro retas, "dadas três retas (ou quatro) de um plano, achar o lugar de um ponto P, que se move de modo que o quadrado da distância de P a uma delas seja proporcional ao produto das distâncias às outras duas (ou, no caso de quatro retas, o produto das distâncias a duas delas é proporcional ao produto das distâncias às outras duas), as distâncias sendo medidas em ângulo dados com relação às retas". Esse problema é muito importante na história da matemática, pois foi com ele que Descartes pôs a prova a sua geometria analítica.

O livro IV de As Cônicas é apresentado a demonstração "de quantos modos as seções de um cone se encontram", e também provas de teoremas relativos a hipérbole como os seguintes: se um ramo de uma hipérbole encontra os dois ramos de uma outra hipérbole, o ramo oposto da primeira hipérbole não encontrará nenhum dos ramos da segunda em dois pontos. E também que se uma hipérbole é tangente a um dos ramos de uma segunda hipérbole com sua concavidade em sentido oposto, o ramo oposto da primeira não encontrará o ramo oposto da segunda.

No quinto livro trata teoremas relativos a retas máximas e mínimas traçadas a uma cônica que na verdade podem ser interpretados como teoremas sobre tangentes e normais.

O sexto livro de Apolônio é descrito por Apolônio como contendo "segmentos de cônicas iguais ou desiguais, semelhantes e dessemelhantes". Entre as proposições provadas temos as que afirmam que todas as parábolas são semelhantes (VI.11) e que uma parábola não pode ser semelhante a uma elipse ou hipérbole nem uma elipse a uma hipérbole(VI.14, VI.15). Outras proposições (VI.26, VI.27) provam que se um cone qualquer é cortado por dois planos paralelos em seções elípticas ou hiperbólicas, as seções serão semelhantes, mas não iguais.

Apolônio não nomeava os pontos que nos dias atuais são tidos como foco apenas se referia a eles indiretamente, a excentricidade não era relacionada a um valor numérico e Apolônio apresenta o foco da parábola como implicação em muitos de seus teoremas, mas não se sabe se o autor conhecia o papel da reta diretriz. Acredita-se que as omissões encontradas nas obras de Apolônio tenham sido tratadas em obras anteriores perdidas.

Comparado aos estudos sobre curvas dos dias atuais o que Apolônio fez fica em posição desfavorável, mas em alguns pontos são muitos semelhantes aos modernos como é possível observar nos exemplos retratados anteriormente. E que se este matemático conhecido como o maior geômetra da antiguidade tivesse a sua disposição todas as ferramentas que os matemáticos criadores da teoria de Geometria Analítica, e não só a álgebra geométrica, seria capaz de desenvolver toda a Geometria Analítica.

4. Considerações Finais

O trabalho correspondente foi realizado parcialmente no âmbito da disciplina História da Matemática onde a professora propôs que escolhêssemos um tema que nos instigassem curiosidades em conhecer seus pormenores.

As cônicas são apresentadas na graduação em Matemática nos períodos iniciais, na disciplina Geometria Analítica, entretanto não é dado enfoque a sua origem e nem as devidas honras ao seu criador, Apolônio de Perga. Neste sentido que decidimos abordar um estudo sobre as cônicas de Apolônio e algumas de suas características.

Durante a execução do trabalho elaboramos e apresentamos um protótipo do cone de Apolônio que é um importante instrumento de ensino das seções cônicas. Segue algumas imagens:

Figura 8: Protótipo

Fonte: arquivo pessoal das autoras

Concluímos que se trata de um assunto estudado há vários anos baseado em vários conhecimentos já adquiridos pelos matemáticos gregos e que possui várias aplicações tecnológicas nos dias atuais, principalmente utilizando as propriedades de reflexão observadas nas superfícies geradas pela revolução de uma parábola, elipse ou hipérbole, cada uma delas em torno de seu eixo focal, como o espelho parabólico usado em telescópios, entre outros objetos que utilizam refletores elípticos e hiperbólicos.

Referências

[1] BOYER, B. C., **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

[2] EVES, H., **Introdução à Historia da Matemática**. 2a Edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[3] GREBOT, G. **Introdução às cônicas**. Rio Claro: SBHMat. (História da Matemática para Professores), 2005.

[4] LOPES, J. **Cônicas e Aplicações**. 2011. 184 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro. 2011.

ISSN 2178-034X