

UM ESTUDO SOBRE A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

*Paulo Roberto dos Santos
Universidade Cruzeiro do Sul
dos-paulo2005@ig.com.br*

*Cíntia A. B. dos Santos
Universidade Cruzeiro do Sul
lcintia.santos@cruzeirodosul.edu.br*

Resumo:

Este artigo apresenta parte de uma pesquisa, defendida em 2014, no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul. O foco de tal pesquisa foi desenvolver um estudo sobre a trigonometria no triângulo retângulo. Para atender ao objetivo, foi utilizada uma pesquisa de método qualitativo, com técnica de análise documental. Para este artigo escolhemos apresentar a análise de parte de uma sequência didática que foi desenvolvida com alunos de um 2º ano de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo e que teve por objetivo fazer levantamento dos conhecimentos trigonométricos prévios dos alunos. Como aporte teórico, foi utilizada a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud. A análise dos resultados evidenciou que os estudantes não dispunham dos invariantes operatórios necessários naquele momento para resolução das situações propostas. Ao final tecemos algumas considerações que vislumbram propor indicativos para o ensino dessa noção matemática.

Palavras-chave: Trigonometria no triângulo retângulo; Razões trigonométricas; Campos conceituais.

1. Introdução

Sendo professor de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo, percebi que, ano após ano, uma parcela significativa de alunos apresentava dificuldades no aprendizado de trigonometria no triângulo retângulo. Mesmo planejando melhor as aulas, verificava que a maioria dos alunos apresentava rendimento insatisfatório nas provas.

Percebendo, naquele momento, por meio de pesquisas, que as respostas almejadas poderiam estar na Educação Matemática, iniciei o curso de mestrado profissional no programa de pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro de Sul, concluído em 2014.

No mestrado realizei a pesquisa “Um Estudo sobre a Trigonometria no Triângulo Retângulo”, pautado na Didática Francesa, tomando como referências a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau (BROUSSEAU, 1986, 1996, 2008), pois ela permite-nos explicar as relações entre saber, professor e aluno e a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud (VERGNAUD, 1996, 1998, 2012), a fim de evidenciar as questões relativas à construção de conceitos por parte dos alunos e as relações que alunos estabelecem entre conhecimentos novos e antigos.

Portanto, este artigo traz um relato dos resultados de uma investigação, que possibilitou verificar os conhecimentos anteriores dos alunos, referentes à trigonometria no triângulo retângulo, ocorrida na perspectiva de um estudo maior.

Uma maneira de entender a mobilização dos conhecimentos dos alunos é compreender os esquemas mobilizados pelos mesmos diante de uma situação proposta. Sendo assim, a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud compõe o referencial teórico deste trabalho, enfatizando, principalmente, o uso de invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação), elementos fundamentais que constituem os esquemas.

As atividades foram desenvolvidas com alunos de um 2º ano, período noturno, de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo que tinham por tarefa a resolução de uma sequência de atividades, individualmente, sem consulta, utilizando somente os materiais fornecidos pelo professor,. Na próxima seção apresentamos a teoria que norteia este trabalho.

2. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

A escolha da teoria de Vergnaud (1996, 1998, 2012) para fundamentar a elaboração da pesquisa se deu porque, para Vergnaud (2012), parte de nosso conhecimento é resultante de habilidades e a utilização da linguagem é especialmente importante para realizar a simbolização e a conceitualização. Pretende-se, com essa teoria, entender como alunos constroem conceitos e como fazem as conexões entre conhecimentos novos e antigos.

Segundo Vergnaud (1996), a principal finalidade da Teoria dos Campos Conceituais é fornecer um quadro que permita a compreensão das filiações e rupturas entre conhecimentos

novos e antigos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por “conhecimento” tanto o saber fazer, quanto os saberes expressos.

Em sua teoria, Vergnaud (1996) refere-se a campos conceituais porque, para ele, um conceito depende de várias situações e uma situação depende de um conjunto de conceitos, pois uma situação não se forma a partir de um único conceito.

Segundo Vergnaud (1996), um conceito é a reunião de três conjuntos:

- conjunto das situações que dão sentido ao conceito;
- conjunto de invariantes operatórios (objetos, propriedades e relações) de que o indivíduo fará uso para compreender as situações (o significado);
- conjunto das representações simbólicas (linguagem natural, símbolos, gráficos, diagramas) que o indivíduo utilizará para representar o conceito, as suas propriedades e as situações (o significante).

Para estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, é necessário considerar simultaneamente os três conjuntos.

O conceito de situação, conforme Vergnaud (1996), está associado ao sentido de tarefa, isto é, uma situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, sendo importante conhecer a sua natureza e as dificuldades próprias. O desempenho em cada subtarefa é importante para o desempenho final, ou seja, o fracasso em uma subtarefa implica o fracasso global, mas a dificuldade de uma tarefa não é constituída pela soma ou multiplicação das dificuldades de cada subtarefa. Portanto, são as situações que dão sentido aos conceitos.

De acordo com Vergnaud (1996), o sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes, ou seja, são os esquemas evocados. Como exemplo, o autor cita que o sentido da adição para um sujeito é o conjunto dos esquemas de que ele pode se utilizar diante das situações a serem confrontadas e implicam a ideia de adição, assim como o conjunto de esquemas que ele pode pôr em prática para operar sobre os símbolos numéricos, algébricos, gráficos e de linguagem, que representam a adição.

Segundo Vergnaud (2009), quando se analisa a atividade em situação, ou seja, os procedimentos, as ações e as representações realizadas pelo aluno, consegue-se verificar em que etapa se dá sua aprendizagem, e deve-se observar e analisar os erros, os acertos e também as dificuldades demonstradas.

Vergnaud (2009) defende que o aluno organiza sua atividade por meio de esquemas e um esquema está sempre associado a uma situação.

Referindo-se ao esquema, Pais (2005) destaca que:

“[...] é uma forma estruturada e invariante de organizar as atividades relacionadas à aprendizagem de conceitos, diante de uma classe de situações vivenciadas pelo aluno. O reconhecimento dos invariantes é uma passagem crucial para que a formação do conceito evolua.” (PAIS, 2005, p. 55)

Vergnaud (2012) afirma que é nos esquemas que se devem procurar os elementos cognitivos os quais permitem a ação do sujeito ser operatória, ou seja, cada esquema tem a ver com uma variedade de situações. O desenvolvimento cognitivo do sujeito está relacionado à quantidade e à diversidade de esquemas que o mesmo possui.

O esquema é composto, essencialmente, pelos conhecimentos de conceito-em-ação e teorema-em-ação, denominados de invariantes operatórios, e por inferências (indispensáveis à prática do esquema). O conceito-em-ação não é um conceito, nem um teorema-em-ação é um teorema, pois conceito e teorema devem ser necessariamente explícitos. Um conceito-em-ação é um conceito implícito válido como pertinente, e um teorema-em-ação é uma proposição válida como verdadeira. Ambos constroem-se em estreita interação. Portanto, o reconhecimento de invariantes é a chave da generalização de um esquema.

Para Vergnaud (1996), a tese subjacente à Teoria dos Campos Conceituais é a de que uma boa representação didática, necessariamente, sustenta-se no conhecimento da dificuldade das tarefas cognitivas, nos obstáculos com que se depara, do repertório dos procedimentos, e das possíveis representações. Nas próximas seções descrevemos as atividades escolhidas e as análises resultantes.

3. Descrição das Atividades

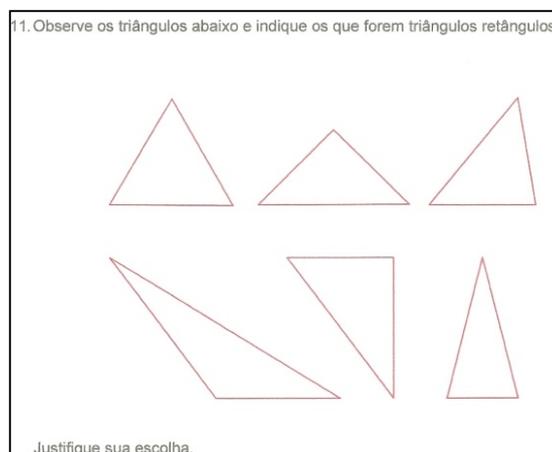
Em nossa pesquisa, a sequência de atividades foi desenvolvida com 16 alunos de duas turmas do 2º ano, período noturno, de uma escola pública da cidade de São Paulo cuja finalidade foi levantar os conhecimentos trigonométricos prévios dos alunos. O desenvolvimento das atividades ocorreu em um horário diferente das aulas, durante duas horas-aula, no período noturno. As atividades foram resolvidas individualmente, sem consulta a qualquer material ou a outros participantes, utilizando somente régua, esquadro e transferidor. O acompanhamento foi registrado em um diário de bordo, em que o professor pesquisador tomou nota das principais dúvidas, questionamentos e comentários, à medida que os alunos escreviam nos protocolos o raciocínio empregado em cada questão. Os resultados da análise dos registros do diário de bordo e dos protocolos nortearam a próxima fase da pesquisa.

Para este artigo, foram selecionadas três atividades da sequência didática (constituída de dez questões) consideradas mais significativas para a análise, que visavam verificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o triângulo retângulo, a semelhança de triângulos e as razões trigonométricas de um triângulo retângulo.

Os alunos não tiveram contato com esses conceitos do começo do ano ao início da pesquisa. Assim, objetivava-se verificar a apropriação pelos alunos desses conceitos, aprendidos em anos anteriores.

Dessa forma, foram propostas as seguintes atividades:

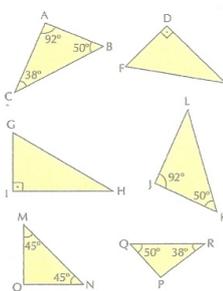
Figura 1 - Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 2 - Atividade 2

12. Podemos afirmar que três destes triângulos são semelhantes entre si. Quais são esses triângulos?

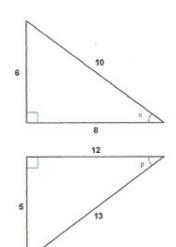


(Fonte: Novo Matemática na medida certa, 9º ano, Centurión, Jakubovic, Lellis. São Paulo, Scipione, 2003.)

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 3 - Atividade 3

17. Com base nas figuras abaixo, determine $\text{sen } \alpha$, $\text{cos } \alpha$, $\text{tan } \alpha$ e $\text{sen } \beta$, $\text{cos } \beta$ e $\text{tan } \beta$:



$\text{sen } \alpha$	
$\text{cos } \alpha$	
$\text{tan } \alpha$	
$\text{sen } \beta$	
$\text{cos } \beta$	
$\text{tan } \beta$	

Fonte: Dados da pesquisa

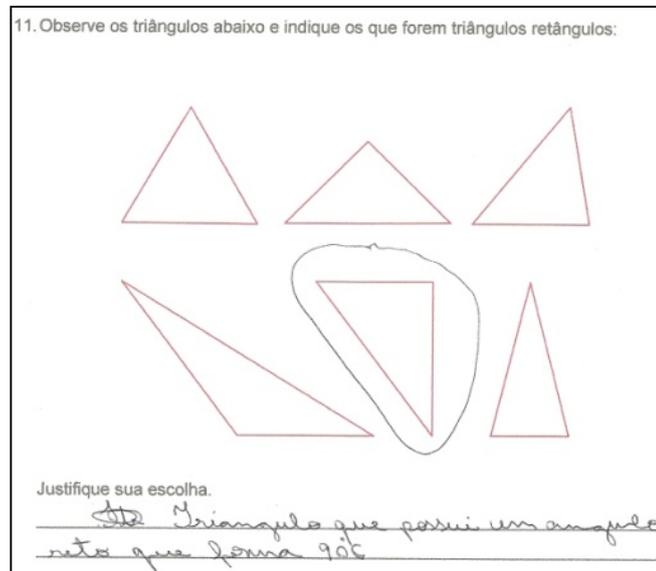
4. Análise e Interpretação dos Dados das Atividades

Para análise dos protocolos da pesquisa, utilizou-se a metodologia qualitativa, com técnica de análise documental. De acordo com Lüdke e André (2012), “analisar os dados qualitativos significa ‘trabalhar’ todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevistas, as análises de documentos e as demais informações disponíveis”. (LÜDKE; ANDRÉ, 2012, p. 45).

O foco da análise foi verificar os esquemas elaborados pelos alunos na resolução dos problemas propostos, procurando reconhecer os invariantes operatórios envolvidos, ou seja, procurando identificar, essencialmente, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação, verdadeiros e falsos, passíveis de serem construídos pelos educandos na resolução dos problemas.

Selecionamos, a seguir, o protocolo de um aluno que acertou parcialmente, evocando corretamente o teorema-em-ação:

Figura 4 – Atividade 1



Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Dentre os estudantes que responderam incorretamente, 3 apresentaram as seguintes justificativas:

- “Se você completar o triângulo retângulo com outro igual a ele mesmo, ele se torna um retângulo”;
- “Acho que são esses três, pois começo a seguir a linha do retângulo”;
- “Pela semelhança ao retângulo, e ser a mais aproximada.”.

Nesses casos, os alunos associaram o triângulo retângulo à figura geométrica de um retângulo. Isso fez refletir que a palavra “retângulo”, usada para qualificar um tipo de triângulo, poderia ser vista por alguns alunos como nome, o que caracterizaria um conceito-em-ação em situações em que o conceito de triângulo retângulo fosse evocado.

Também se observaram, nas respostas incorretas, as seguintes justificativas:

- “Todos são triângulos, todos, além de triângulos, têm suas três pontas”;
- “Triângulo retângulo é que todos os lados têm a mesma medida”;
- “Por ter lados iguais, o nº 1, 2 e 3”.

No primeiro caso, é possível que o aluno não tenha percebido que se tratava de um triângulo específico, e, nos demais, os alunos podem ter tomado o triângulo retângulo pelo equilátero. As outras respostas foram:

- “Os dois (triângulos escolhidos pela aluna) são parecidos”;
- “Os três últimos são, eles não deixam de ser um triângulo, mas eles são compridos e, por isso, são triângulos retângulos”;
- “São triângulos retângulos porque não são equiláteros e isósceles”.

Considerando que, para Vergnaud, “os conceitos-em-ação permitem identificar os objetos, as propriedades e as relações” (VERGNAUD, 2009, p. 22), observou-se que os alunos mobilizaram os seguintes conceitos-em-ação quanto ao conhecimento do triângulo retângulo:

- Ângulo de 90° ;
- Triângulo;
- Retângulo.

Pôde-se, também, reconhecer alguns teoremas-em-ação que foram evocados:

- “Triângulo retângulo possui um ângulo de 90° ”;
- “Se completar um triângulo retângulo com outro igual, ele se torna um retângulo”;
- “São triângulos retângulos, pois seguem a linha do retângulo”;
- “São triângulos retângulos, pela semelhança ao retângulo”.

Sendo assim, pôde-se considerar que apenas uma pequena parte do grupo sabia corretamente o que é um triângulo retângulo, entretanto, a disposição da figura ou a necessidade de confirmação do ângulo reto poderia ser um elemento a dificultar o reconhecimento.

A seguir, descrevemos a análise da atividade 2, apresentando um protocolo de uma aluna que indicou corretamente os três triângulos semelhantes:

Figura 5 – Atividade 2

Justifique sua escolha.
Os triângulos (ABC) , (LJK) , e (PQR) são semelhantes pois todos o resultado da soma de seus ângulos equivale a 180° , e possuem 50° , 38° , e 92° graus.

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Observou-se que os alunos mobilizaram os seguintes conceitos-em-ação nesse problema de semelhança:

- Ângulos;
- Triângulos;
- Triângulos retângulos;
- Soma das medidas dos ângulos internos de triângulos.

Nos 3 problemas indicados corretamente, pôde-se reconhecer os seguintes teoremas-em-ação evocados pelos alunos:

- “Os triângulos [...] são semelhantes, pois todos os resultados da soma de seus ângulos equivalem a 180° , e possuem 50° , 38° , e 92° graus”, ou seja, a soma das medidas dos ângulos internos é 180° e possuem ângulos internos correspondentes congruentes;
- “Porque a soma dá 180° ”, isto é, porque a soma das medidas dos ângulos internos é 180° ;
- “[...] Por ter ângulos semelhantes”, isto é, por ter as medidas dos ângulos internos correspondentes congruentes.

Nos 5 problemas com indicações parcialmente corretas, observou-se que, em um dos casos, o aluno justificou “pois parecem ter a mesma forma, porém invertidos de maneiras diferentes”, e, nos demais, os alunos apresentaram as justificativas seguintes:

- “Pelas dimensões, ângulos são semelhantes”;
- “[...] Eles se assemelham em graus”;
- “São semelhantes por causa dos ângulos”;
- “Porque cada um tem a mesma medida e somando-as dá 180° ”

Nesses casos, pôde-se considerar que os alunos evocaram o teorema-em-ação “os triângulos são semelhantes, então as medidas dos ângulos internos correspondentes são iguais”, embora também se tenham observado referências às dimensões dos triângulos e à soma das medidas dos ângulos internos.

Verificou-se que, em quatro das indicações, um dos três triângulos escolhidos não indicava a medida dos ângulos internos e, em uma das indicações, o triângulo escolhido apresentava as medidas de dois ângulos internos de 45° , ou seja, mesmo evocando corretamente o teorema-em-ação, os alunos indicaram incorretamente um dos triângulos. Esse erro poderia estar relacionado à determinação da medida de um dos ângulos internos de qualquer triângulo, dados os outros dois, sabendo que a soma de suas medidas é 180° .

Nos 3 problemas com indicações incorretas, obtiveram-se as seguintes justificativas:

- “[...] pois contém os mesmos ângulos (90°) e é um ângulo reto”;
- “Todos são triângulos retângulos.”;
- “Porque triângulos retângulos são sempre iguais”

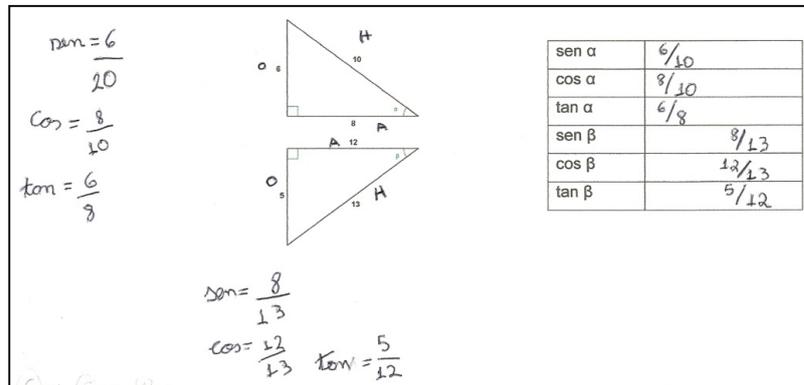
Pode-se dizer que, nesses casos, os alunos evocaram o teorema-em-ação “os triângulos são semelhantes, porque são triângulos retângulos (ou possuem um ângulo reto)”.

Apesar do fato do problema dar destaque aos ângulos e não aos lados, verificou-se que nenhum aluno mencionou a propriedade da proporcionalidade. Tal fato poderia estar relacionado ao seu desconhecimento ou esquecimento.

A atividade 3 solicitava o cálculo das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em relação a um dos ângulos agudos em 2 triângulos retângulos em posições diferentes.

Nesse caso, foi obtida apenas 1 resposta considerada correta, 2 respostas parcialmente corretas, 5 respostas incorretas e 8 atividades ficaram sem respostas. Segue o protocolo da resposta considerada correta:

Figura 6 – Atividade 3



Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Observou-se que os 2 casos parcialmente corretos ocasionaram-se do fato de que os alunos não haviam respondido a todos os itens, no entanto, os itens já respondidos estavam corretos. Dentre os 5 casos de respostas incorretas, em 4 deles, os alunos apresentaram as medidas dos lados dos triângulos retângulos como se fossem os valores do seno, cosseno e tangente, ou seja, mobilizaram os conceitos-em-ação de seno, cosseno e tangente como sendo as medidas dos lados do triângulo retângulo.

5. Considerações Finais

Neste artigo, apresentou-se parte de um instrumento que visou levantar o perfil e os conhecimentos prévios dos educandos quanto à trigonometria no triângulo retângulo. Moreira (2002) argumenta que as concepções prévias dos alunos contêm teoremas e conceitos-em-ação que podem ser determinantes no domínio de um campo conceitual, podendo ajudar ou impedir a aprendizagem desses alunos. Nesse caso, cabendo a imprescindível ação mediadora do professor.

A Teoria dos Campos Conceituais permitiu ter uma visão mais clara da natureza da problemática. Constatou-se que a maioria absoluta dos alunos não dispõe dos invariantes operatórios necessários no que se refere ao triângulo retângulo e à semelhança de triângulos.

Nesse ponto, já se configura uma situação que possivelmente compromete a construção do conceito das razões trigonométricas no triângulo retângulo, pois, para a construção do conceito de razões, são necessárias a disponibilidade e mobilização de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação fundamentais.

Desse modo, pôde-se constatar que a mobilização dos conceitos-em-ação de seno, cosseno e tangente exige a utilização de uma diversidade de variantes operatórios que não foram reconhecidos pela maioria dos alunos diante de algumas situações, ou seja, a mobilização de conceitos trigonométricos exige a disponibilidade de conceitos e teoremas-em-ação dos quais os estudantes não dispunham naquele momento, fato verificado pelos educandos, com apenas um acerto no problema sobre razões trigonométricas.

Os resultados da análise completa da sequência didática serviram de orientação para a etapa seguinte, fornecendo elementos para elaboração das situações de aprendizagem próprias.

6. Referências

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 2012.

MOREIRA, Marco Antônio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, jan. 2002.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

VERGNAUD, Gerard. **Teoria dos campos conceituais**. In: NASSER, L. (Ed.). Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26

_____. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, p. 167-181, 1998.

_____. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

_____. Construção do conhecimento matemático e a teoria dos campos conceituais (conferência). In: SIPEMAT - SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza/CE: SIPEMAT, 2012.

_____. O que é aprender?. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: CRV, 2009. p. 13-35.