

## MODELAGEM MATEMÁTICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO: EXPLORANDO ALGUMAS SITUAÇÕES

*Thiago Fernando Mendes  
Universidade Estadual de Londrina  
thiagomendes\_96@hotmail.com*

*Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa Robim  
Universidade Estadual do Norte do Paraná  
babipalharini@hotmail.com*

*Rudolph dos Santos Gomes Pereira  
Universidade Estadual do Norte do Paraná  
rudolphsantos@uenp.edu.br*

### **Resumo:**

Esta pesquisa descreve uma investigação que busca identificar características do pensamento algébrico que podem emergir a partir do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por alunos do quarto ano de Licenciatura em Matemática. Para isso, foram analisadas duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos. O estudo está fundamentado na modelagem matemática como uma alternativa pedagógica e usa uma abordagem qualitativa. Os dados coletados por meio dos registros escritos dos alunos foram analisados por meio da análise de conteúdo. A análise dos resultados possibilitou concluir que a modelagem matemática contribui em diferentes aspectos no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, uma vez que possibilita a identificação de diferentes características deste tipo de pensamento matemático em suas diferentes etapas.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Modelagem Matemática; Pensamento Algébrico.

### **1. Introdução**

Este artigo relata uma pesquisa cujo objetivo foi identificar características do pensamento algébrico manifestadas por alunos do Ensino Superior no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em diferentes momentos.

Uma questão que tem sido discutida entre pesquisadores da Educação Matemática é definir em que momento da escolaridade inicia-se o pensamento algébrico do estudante. Além disso, o ensino da álgebra tem sido bastante discutido uma vez que, ao longo de sua história, manifestaram-se várias concepções de álgebra, das quais podemos citar a processológica, a linguístico-estilística, a linguístico-sintático-semântica, a linguístico-postulacional, entre outras (FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993, p. 85) e, o que preocupa muitos pesquisadores é o fato de que em todas essas concepções “[...] o ensino-aprendizagem da álgebra reduz-se ao chamado ‘transformismo algébrico’”.

Com relação ao conceito de álgebra, as Diretrizes Curriculares Orientadoras da Educação Básica (DCE), documento que rege a Educação Básica no Estado do Paraná,

colocam que

tal conceito “[...] é muito abrangente e possui uma linguagem permeada por convenções diversas de modo que o conhecimento algébrico não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente” (PARANÁ, 2008, p. 52).

Kieran (2004) menciona o desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início da escolaridade dos indivíduos como uma forma de melhorar os processos de ensino e aprendizagem de álgebra, com o apoio da aritmética.

Discussões a respeito do processo de ensino e aprendizagem da álgebra na Educação Matemática podem ser encontradas em outras pesquisas e publicações (BLANTOM; KAPUT, 2005; KAPUT, 1999; KIERAN, 2004; LINS; GIMÉNEZ, 1997; entre outros).

Com relação ao processo de ensino e aprendizagem da matemática as DCE propõem diferentes abordagens de ensino que podem possibilitar uma contextualização da matemática em sala de aula (PARANÁ, 2008) e, dentre tais abordagens, a modelagem matemática se destaca pelo fato de partir de problemas da realidade (ALMEIDA; BRITO, 2005).

## 2. Modelagem Matemática na Educação Matemática

Diferentes autores sinalizam a importância de atividades de modelagem matemática, em sala de aula, para o ensino de matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BARBOSA, 2004; KLÜBER, 2010; MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013; BISOGNIN; BISOGNIN, 2012).

A modelagem matemática na Educação Matemática, indicada pelos documentos oficiais como uma tendência metodológica para o ensino de matemática pode ser entendida como uma alternativa pedagógica para o processo de ensino e de aprendizagem de matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005).

Em sala de aula, é possível a elaboração de uma atividade de modelagem matemática e/ou a utilização de atividades já disponíveis na literatura sobre o tópico na Educação Matemática. Uma atividade de modelagem matemática envolve fases relacionadas ao conjunto de procedimentos necessários para analisar, estruturar e solucionar uma situação-problema, as quais Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15), caracterizam como: “inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação”.

Inteiração: essa etapa representa o primeiro contato com essa situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução, assim a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase [...].

Matematização: é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas, que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração [...].

Resolução: Esta fase consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado [...].

Interpretação de Resultados e Validação: a interpretação dos resultados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema, a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15-16).

Para introduzir atividades de modelagem matemática, em sala de aula, o professor pode optar por uma introdução gradativa, na qual o aluno, aos poucos, se familiariza com essa abordagem, conforme defendem Almeida e Dias (2004). Primeiramente, o professor leva para a sala de aula atividades de Modelagem que já foram desenvolvidas, contendo alguns dados iniciais já coletados, com algumas informações colocadas e recria esta atividade com os alunos. No segundo momento, em conjunto com os alunos, o professor a partir de um conjunto de informações define um problema para estudar. Por fim, os próprios alunos são responsáveis por conduzir uma atividade de modelagem matemática, desde a escolha do tema até a validação do modelo e a comunicação.

Durante o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, ações como a escolha do tema, elaboração de hipóteses, definição de variáveis, elaboração e dedução de um modelo matemática, bem como sua validação e resposta para a situação-problema em estudo são atribuídas gradativamente aos alunos, de acordo com os momentos da modelagem matemática, defendidos por Almeida e Dias (2004).

Para falar do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por alunos do Ensino Superior, nos momentos da modelagem citadas, abordamos agora a teoria sobre pensamento algébrico que dá suporte a pesquisa desenvolvida.

### 3. Pensamento Algébrico

O pensamento algébrico é discutido por diversos autores, como Ponte, Branco, e Matos (2009), Kieran (2004), Blanton e Kaput (2005), entretanto, ainda não é possível encontrar uma definição precisa para o mesmo. Dessa forma, nesta seção será apresentada, brevemente, uma discussão a respeito das características desse pensamento considerando diferentes autores.

Para

Kaput (1999), o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, por meio de conjecturas e argumentos, são estabelecidas generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas por meio de linguagens cada vez mais formais.

De acordo com Kieran (2004), o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde o início da formação escolar do indivíduo, envolvendo o desenvolvimento de formas de pensar dentro de atividades para as quais *letras-símbolo* podem ser utilizadas. Entretanto, o autor ressalta que tal uso não precisa, necessariamente, ser exclusivo, isto é, o pensamento algébrico pode se desenvolver sem o uso de *letras-símbolo* em tudo, como analisar relações entre quantidades, notar estruturas, estudar mudanças, generalizações, resolver problemas, modelação, justificar e realizar provas e previsões.

Ponte, Branco e Matos (2009, p.10) comentam que no pensamento algébrico a atenção não é dada somente aos objetos, mas também “[...] às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto”.

Segundo esses autores, o pensamento algébrico inclui três vertentes:

A primeira vertente – representar – diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica. Na segunda vertente – raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente – assumem especial importância o relacionar (em particular, analisando propriedades de certos objectos matemáticos) e o generalizar (estabelecendo relações válidas para uma certa classe de objectos). [...], na terceira vertente – resolver problemas, que inclui modelar situações - trata-se de usar representações diversas de objectos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10-11).

Para Lins e Giménez (1997), o pensamento algébrico é um modo de produzir significado para a álgebra, tendo como principais características o aritmeticismo, o internalismo e a analiticidade.

De forma sintética, para estes autores, o aritmeticismo consiste em trabalhar exclusivamente com números, operações aritméticas e uma relação de igualdade. O internalismo, por sua vez, implica em considerar os números e as operações por meio de suas propriedades. E a analiticidade refere-se a trabalhar com o desconhecido como se fosse conhecido, remetendo a ideia de que os números genéricos fossem específicos e as incógnitas fossem dadas.

Segundo Blanton e Kaput (2005, p. 143) o raciocínio algébrico ocorre quando os “estudantes generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelece algumas generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas cada vez mais em caminhos formais apropriados a suas idades”. De maneira similar, a

modelação como

uma forma de raciocínio algébrico também envolve generalização de regularidades, mas de situações matemáticas ou fenômenos.

Baseando-se nos referenciais apresentados neste capítulo, buscaremos neste artigo analisar atividades de modelagem matemática de alunos do Ensino Superior.

#### 4. Aspectos metodológicos

Para identificar características do pensamento algébrico manifestadas por alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, em diferentes momentos da modelagem matemática, duas são as atividades analisadas, sendo uma desenvolvida como trabalho de conclusão de curso de especialização em Educação Matemática, e outras por alunos do quarto ano de Licenciatura em Matemática que cursavam a disciplina Introdução à Modelagem Matemática.

Procedimentos da pesquisa qualitativa são utilizados, pois a pesquisa aqui descrita é essencialmente descritiva; a coleta dos dados se dá em uma sala de aula com alunos envolvidos em atividades de modelagem matemática; o próprio pesquisador usa de instrumentos, como diário de campo e gravações em áudio e vídeo para coleta de dados; o envolvimento dos alunos com atividades de modelagem matemática é o *objeto* de análise, ou seja, o *processo* é o foco de observação.

Para analisar os dados coletados, consideramos as técnicas e métodos da *análise de conteúdo*, conforme Bardin (2011, p. 37) a caracteriza como “um conjunto de técnicas de análise das comunicações”. Três são os polos cronológicos que caracterizam as diferentes fases da análise de conteúdo: a pré-análise; a exploração do material; e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A codificação dos dados coletados compreende a escolha das unidades de análise, as regras que serão utilizadas e a escolha das categorias. Neste processo unidades de registro e de contexto são utilizadas para responder de maneira pertinente as características da pesquisa:

*A unidade de registro* – É a unidade de significação codificada e corresponde ao segmento de conteúdo considerado unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial [...].

A unidade de contexto serve de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores às da unidade de registro) são ótimas para que se possa compreender a significação exata da unidade de registro (BARDIN, 2011, P. 134-136).

As atividades utilizadas neste trabalho foram desenvolvidas por alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do norte do Paraná.

Para

iniciarmos a análise, foi feita a pré-análise dos dados coletados, bem como organização, operacionalização, sistematização, codificação e enumeração de todo o material selecionado.

As atividades foram desenvolvidas em diferentes momentos da modelagem matemática, conforme Almeida e Dias (2004), sendo considerados o primeiro e o terceiro momento, e objetivando agilizar a análise e preservar a identidade dos participantes, neste capítulo serão utilizados os códigos A1 e A3 para identificar as duas atividades que compõem o *corpus* da análise. O código A1 representará a atividade desenvolvida no primeiro momento da modelagem matemática e A3 a atividade do terceiro momento.

## 5. Análise dos Dados

Inicialmente, foram definidas duas unidades de contexto para análise dos dados: aspectos da modelagem matemática na resolução e aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico na resolução.

### *Unidade de contexto: aspectos da modelagem matemática na resolução*

O estabelecimento desta unidade objetivou identificar aspectos relacionados à modelagem matemática nas resoluções apresentadas pelos alunos no decorrer do desenvolvimento da atividade. Para isso, fez-se uso das etapas da modelagem matemática defendidas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), sendo elas: inteiração; matematização; resolução e interpretação e validação dos resultados.

### *Unidade de registro efetiva: inteiração*

Nesta unidade são apresentadas evidências da primeira etapa da modelagem matemática. Esta etapa representa um primeiro contato dos alunos com a situação-problema que se pretende estudar. O objetivo da inteiração é conhecer as características e especificidades de cada situação a fim de se estabelecer meios para sua resolução.

Quadro 1: Unidade: inteiração

Ano	Cornélio Procopio	Paraná	Brasil
1991	46.644	8.448.713	146.025.475
1996	46.313	8.942.244	156.032.944
2000	46.861	9.563.458	169.799.170
2007	46.931	10.284.503	183.987.291
2010	46.928	10.444.526	190.755.799

Quadro 01: Crescimento Populacional de 1991 à 2010  
Fonte: IBGE

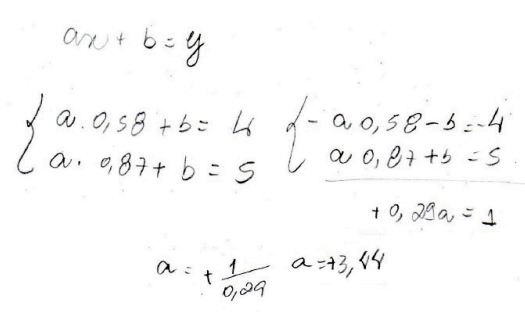
A3	
<b>Síntese da unidade</b>	Com os dados apresentados nesta unidade de registro efetiva foi possível identificar registros de interação somente na atividade desenvolvida no terceiro momento da modelagem matemática, uma vez que, neste caso os próprios alunos são responsáveis por conduzir a atividade deste a escolha do tema. Como a atividade A1 foi definida pelos pesquisadores responsáveis por este trabalho, a interação se deu no momento da leitura e discussão da situação-problema o que impossibilitou a captação de registros escritos desta etapa, visto que não analisamos aqui registros em áudio e vídeo.

Fonte: os autores.

### Unidade de registro efetiva: matematização

Nessa unidade são incluídos os registros que representam a etapa da matematização no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Nesta etapa, o problema que inicialmente apresenta-se em linguagem natural é escrito em linguagem matemática. Trata-se de um processo de visualização e utilização de símbolos para a realização de descrições matemáticas.

Quadro 2: Unidade: matematização

<table border="1"> <thead> <tr> <th>anos</th> <th>xi</th> <th>yi</th> <th>xi<sup>2</sup></th> <th>xi*yi</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1990</td> <td>1</td> <td>8.448.713,00</td> <td>1</td> <td>8.448.713,00</td> </tr> <tr> <td>1995</td> <td>2</td> <td>8.942.244,00</td> <td>4</td> <td>17.884.488,00</td> </tr> <tr> <td>2000</td> <td>3</td> <td>9.563.458,00</td> <td>9</td> <td>28.690.374,00</td> </tr> <tr> <td>2005</td> <td>4</td> <td>10.284.503,00</td> <td>16</td> <td>41.138.012,00</td> </tr> <tr> <td>2010</td> <td>5</td> <td>10.444.526,00</td> <td>25</td> <td>52.222.630,00</td> </tr> <tr> <td></td> <td>15</td> <td>47.683.444,00</td> <td>55,00</td> <td>148.384.217,00</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right;">A3</p>	anos	xi	yi	xi <sup>2</sup>	xi*yi	1990	1	8.448.713,00	1	8.448.713,00	1995	2	8.942.244,00	4	17.884.488,00	2000	3	9.563.458,00	9	28.690.374,00	2005	4	10.284.503,00	16	41.138.012,00	2010	5	10.444.526,00	25	52.222.630,00		15	47.683.444,00	55,00	148.384.217,00	 <p style="text-align: right;">A1</p>
anos	xi	yi	xi <sup>2</sup>	xi*yi																																
1990	1	8.448.713,00	1	8.448.713,00																																
1995	2	8.942.244,00	4	17.884.488,00																																
2000	3	9.563.458,00	9	28.690.374,00																																
2005	4	10.284.503,00	16	41.138.012,00																																
2010	5	10.444.526,00	25	52.222.630,00																																
	15	47.683.444,00	55,00	148.384.217,00																																
<b>Síntese da unidade</b>	Nesta unidade de análise foram contemplados os desenvolvimentos nos dois momentos da modelagem matemática. Os alunos escreveram em linguagem matemática o problema que se apresenta inicialmente em linguagem natural. No caso do registro A3 o aluno utiliza os dados coletados e explorados na etapa anterior (inteiração) e os reescreve utilizando ferramentas matemáticas. Já o registro A1, a partir da descrição da atividade, estabelece valores constantes e variáveis a fim de solucionar a situação-problema.																																			

Fonte: os autores.

### Unidade de registro efetiva: resolução

A resolução do problema matemático é o momento em que os alunos determinam um modelo matemático que represente a situação-problema apresentada (Quadro 3).

Quadro 3: Unidade: resolução



<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>5</td> <td>15</td> <td>80,34</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>55</td> <td>241,58</td> </tr> </table> <p> <math>\begin{cases} 5a+15b=80,34 \\ 15a+55b=241,58 \end{cases}</math> </p> <p>A= 15,90; B= 0,05640 ;</p> <p>Equação exponencial para o Paraná: <math>y=8.026105,61 \cdot e^{0,05640x}</math></p> <p style="text-align: right;">A3</p>	5	15	80,34	15	55	241,58	<p style="text-align: center;"> <math>a = +3,44</math>  <math>b = 2,01</math> </p> <p style="text-align: center;"> <math>f(x) = -3,44x + 2,01</math> </p> <p style="text-align: right;">A1</p>
5	15	80,34					
15	55	241,58					
<p><b>Síntese da unidade</b></p>	<p>Aqui é feita a elaboração de um modelo matemático que tem como objetivo descrever a situação que está sendo estudada. Tal modelo visa permitir a análise dos aspectos relevantes da situação assim como responder aos questionamentos colocados no início do processo.</p>						

Fonte: os autores.

### Unidade de registro efetiva: interpretação e validação dos resultados

A interpretação e a validação dos resultados obtidos constitui um processo de avaliação feito pelos modeladores. Aqui, os resultados obtidos a partir do modelo matemático elaborado são analisados de forma a constatar se, de fato, os mesmos representam a situação-problema inicial.

Quadro 4: Unidade: interpretação e validação dos resultados

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Dados Reais</th> <th>Modelados</th> <th>variação</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>8.448.713,00</td> <td>8.491.786,74</td> <td>1,00510</td> <td>0,51</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>8.942.244,00</td> <td>8.984.487,06</td> <td>1,00472</td> <td>0,47</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9.563.458,00</td> <td>9.505.774,25</td> <td>0,99397</td> <td>-0,60</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>10.284.503,00</td> <td>10.057.306,95</td> <td>0,97791</td> <td>-2,21</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>10.444.526,00</td> <td>10.640.840,02</td> <td>1,01880</td> <td>1,88</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td></td> <td>11.258.230,15</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right;">A3</p>		Dados Reais	Modelados	variação	%	1	8.448.713,00	8.491.786,74	1,00510	0,51	2	8.942.244,00	8.984.487,06	1,00472	0,47	3	9.563.458,00	9.505.774,25	0,99397	-0,60	4	10.284.503,00	10.057.306,95	0,97791	-2,21	5	10.444.526,00	10.640.840,02	1,01880	1,88	6		11.258.230,15			<p style="text-align: center;"> <math>f(x) = 6,99x - 1</math> </p> <p style="text-align: center;"> <i>Aplicando</i>  <math>f(1,74) = 6,99 \cdot (1,74) - 1</math> </p> <p style="text-align: center;"> <math>f(1,74) = 12,16 - 1</math> </p> <p style="text-align: center;"> <math>f(1,74) = 11,16</math> </p> <p style="text-align: center;"> <math>0 = 6,99x - 4</math>  <math>4 = 6,99x</math>  <math>x = \frac{4}{6,99}</math> </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>x = 0,573</math> </div> <p style="text-align: right;">A1</p>
	Dados Reais	Modelados	variação	%																																
1	8.448.713,00	8.491.786,74	1,00510	0,51																																
2	8.942.244,00	8.984.487,06	1,00472	0,47																																
3	9.563.458,00	9.505.774,25	0,99397	-0,60																																
4	10.284.503,00	10.057.306,95	0,97791	-2,21																																
5	10.444.526,00	10.640.840,02	1,01880	1,88																																
6		11.258.230,15																																		
<p><b>Síntese da unidade</b></p>	<p>Ambos os alunos interpretaram e validaram os modelos obtidos de acordo com os dados apresentados pela situação-problema e/ou levantados por eles.</p>																																			

Fonte: os autores.

### Unidade de Contexto: aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico na resolução

A fim de identificar aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico nas resoluções apresentadas pelos alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, essa unidade de contexto foi elaborada de acordo com as características do pensamento algébrico apresentadas na fundamentação teórica deste artigo.

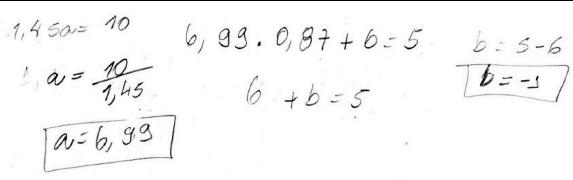
Foram estabelecidas cinco unidades de registro: estabelecimento de generalizações; análise de estruturas; realização de provas; realizações de previsões; utilização de sistemas de representação.



*registro efetiva: estabelecimento de generalizações*

Nesta unidade de registro estão contemplados momentos dos registros escritos dos alunos em que evidenciou-se o estabelecimento de generalizações algébricas no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Quadro 5: Unidade: estabelecimento de generalizações

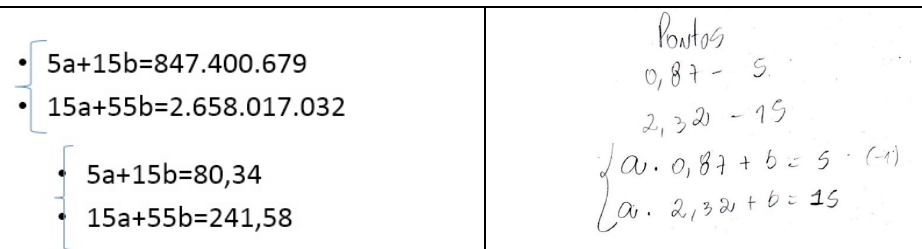
		A1
<b>Síntese da unidade</b>	<p>O aluno buscou estabelecer generalizações algébricas entre os dados que estavam sendo explorados. Ao estabelecer uma generalização, ocorre uma elevação do raciocínio do aluno, momento em que o foco não está mais na situação em si, mas nos padrões, nos procedimentos e nas relações entre os mesmos (KAPUT, 1999).</p>	

Fonte: os autores.

*Unidade de registro efetiva: análise de estruturas*

A análise de estruturas é evidenciada quando números e operações são considerados apenas segundo as suas propriedades, não estando, necessariamente, vinculadas à situação-problema inicialmente apresentada. De forma sintética, a álgebra é utilizada como estudo de estruturas matemáticas, ou seja, letras são manipuladas buscando-se uma função ou padrão generalizado.

Quadro 6: Unidade: análise de estruturas

		A1
A3		
<b>Síntese da unidade</b>	<p>Os alunos dessa unidade explicitaram o estudo de estruturas matemáticas. Este tipo de estudo envolve ações de generalização e abstração fundamentadas em cálculos que possibilitem a compreensão daquilo que está sendo desenvolvido.</p>	

Fonte: os autores.

*Unidade de registro efetiva: realização de provas*

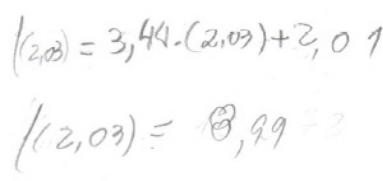
Nessa

unidade estão os registros que sinalizam um tipo de pensamento algébrico em que os alunos realizam a prova de sua conjectura, ou seja, após a resolução da situação-problema, os mesmos buscam, matematicamente, provar que as respostas obtidas são adequadas.

Quadro 7: Unidade: realização de provas

Dados Reais	Modelados	variação	%
1 8.448.713,00	8.491.786,74	1,00510	0,51
2 8.942.244,00	8.984.487,06	1,00472	0,47
3 9.563.458,00	9.505.774,25	0,99397	-0,60
4 10.284.503,00	10.057.306,95	0,97791	-2,21
5 10.444.526,00	10.640.840,02	1,01880	1,88
6	11.258.230,15		

A3



A1

**Síntese da unidade**

Tanto na atividade desenvolvida no primeiro momento da modelagem matemática (A1) quanto a do terceiro momento (A3) os alunos buscaram provar seus resultados considerando os dados do próprio problema, isto é, os mesmos utilizaram os modelos matemáticos encontrados e analisaram se aplicando os mesmos aos dados do problema obtinham-se uma resposta adequada.

Fonte: os autores.

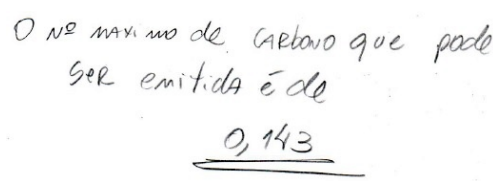
#### Unidade de registro efetiva: realização de previsões

Nessa unidade de análise estão os registros que sinalizam um pensamento algébrico que enfatiza a operação realização de previsões matemáticas a partir dos dados estabelecidos algebricamente.

Quadro 8: Unidade: realização de previsões

2000	3	169.799.170	9	18,95	56,85
2005	4	183.987.291	16	19,03	76,12
2010	5	190.755.799	25	19,07	95,33
	15	847.400.679	55	94,7173	284,84

A3



A1

**Síntese da unidade**

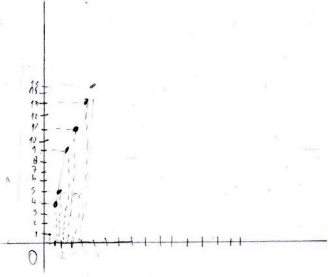
Nessa unidade de registro é possível observar que ambos os alunos fazem previsões a partir do modelo matemático obtido. É importante ressaltar que tais previsões foram feitas, em ambos os momentos – A1 e A3, somente após tais modelos terem sido devidamente validados.

Fonte: os autores.

#### Unidade de registro efetiva: utilização de sistemas de representação

Nessa unidade estão os registros que sinalizam a utilização de sistemas de representação algébrica por parte dos estudantes. Tal utilização representa um tipo de pensamento algébrico uma vez que a mesma pode simbolizar mais do que um simples esboço da situação, mas também uma forma de resolução algébrica da mesma.

utilização de sistemas de representação

	
A1	
<b>Síntese da unidade</b>	A utilização de diferentes sistemas de representação, por exemplo, a representação gráfica (como no caso A1) pode ser considerada um tipo de pensamento algébrico, uma vez que tal uso pode ser encarado como uma representação complementar à algébrica.

Fonte: os autores.

## 6. Discussões e considerações finais

No presente artigo, buscamos analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos em atividades de modelagem matemática considerando dois diferentes momentos do desenvolvimento deste tipo de atividade, o primeiro momento, em que o pesquisador leva para a sala de aula atividades de modelagem que já foram desenvolvidas anteriormente, contendo dados já coletados e algumas informações prontas e o terceiro momento em que os próprios alunos são responsáveis por conduzir a atividade, desde a definição do tema até a validação do modelo e interpretação dos resultados.

Com a análise dos dados foi possível perceber que a modelagem matemática contribui no desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que, na resolução de uma atividade na perspectiva desta alternativa pedagógica, independente do momento em que a mesma foi desenvolvida, as principais características dos diferentes tipos de pensamentos algébricos são evidenciadas.

Nesse sentido, inferimos que atividades de modelagem matemática colaboram para que os alunos utilizem a álgebra em diversas concepções, no caso dessa pesquisa, nas compreensões de álgebra como aritmética generalizada, estudo de processos para resolução de problemas, expressão de variação de grandezas e como estudo de estruturas matemáticas, fazendo com que características como estabelecimento de generalizações, realização de provas, previsões e utilização de diferentes sistemas de representação emergissem durante o processo.

## 7. Referências

- ALMEIDA;  
BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Modelling Mathematics activities: what sense do students attribute to them?*. **Ciência & Educação**, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.
- \_\_\_\_\_; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, n. 22, pp. 19-35, 2004.
- \_\_\_\_\_; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- BARBOSA, J. C. As relações dos professores com a Modelagem Matemática. In: encontro nacional de educação matemática, 8, 2004, Recife. **Anais**. Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.
- BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.. Percepções de Professores sobre o Uso da Modelagem Matemática em Sala de Aula. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p.1049-1079, ago. 2012.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n.5, p. 412-443, 2005.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Revista Pro-Prosições**, p. 79-91, 1993.
- KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, p. 133-155, 1999.
- KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, v. 8, p. 139-151, 2004.
- KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In **Modelagem Matemática uma perspectiva para a Educação Básica**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 97-114, 2010.
- LINS, R. C.; GIMÉNEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para no século XXI**. Campinas - SP: Papirus, 1997.
- MEYER, J. F. C. de A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.
- PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná**. Secretaria de Estado da Educação, Paraná, 2008.
- PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: ME – DGIDC, 2009.