UTILIZAÇÃO DE QUESTÕES DO SARESP COMO METODOLOGIA DE ANÁLISE DE ERROS

Alessandro Gonçalves
PUC-SP
allejoao@ig.com.br

Barbara Lutaif Bianchini
PUC-SP
barbara@pucsp.br

Resumo:
O nosso objetivo nesse artigo é apresentar a possibilidade de utilização de itens de avaliações externas à escola para análise de erros dos alunos. As análises que apresentaremos fazem parte da nossa pesquisa de mestrado, cujo objetivo principal foi analisar as estratégias dos alunos com foco nos erros cometidos e dificuldades apresentadas ao resolverem um instrumento de coleta de dados composto por 13 questões de Álgebra escolhidas nos relatórios pedagógicos do Sistema de Avaliação da Aprendizagem Escolar do Estado de São Paulo (Saresp) dos anos de 2008 a 2011. Como referencial teórico adotamos as categorias de erros: dados mal utilizados, interpretação incorreta de linguagem, inferências logicamente inválidas, teoremas ou definições distorcidos, falta de verificação da solução e erros técnicos. Os resultados mostraram que os erros cometidos são na sua maioria técnicos.
Palavras-chave: Educação Algébrica; Estratégias; Erros; Saresp.

1. Introdução

As produções dos alunos têm muito a revelar sobre os conhecimentos matemáticos deles quando o professor não as corrige somente atribuindo "certo ou errado". Se em vez disso, o professor analisar as estratégias utilizadas na resolução das situações-problema, procurando verificar as dificuldades apresentadas e os erros cometidos, poderá contribuir de forma mais significativa para a formação matemática do estudante. O fato é que muitas vezes os alunos apresentam resoluções que não estão de acordo com o que é esperado como resposta. Uma análise cuidadosa das produções de sala de aula com foco nos erros pode levar a conclusões diferentes a respeito do que verdadeiramente os alunos sabem. Essa análise cuidadosa leva à compreensão das causas dos erros e dificuldades, pois vai além do simples apontamento de erros e acertos e pode contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem à medida que leva o professor a refletir sobre como ele tem proposto o ensino.

Neste artigo apresentaremos as análises de três questões envolvendo operações com polinômios incluindo exemplos de protocolos com a resolução de alguns alunos destacando os erros cometidos. Estas questões fazem parte de um instrumento de dados contendo 13 questões sobre Álgebra retiradas dos relatórios do Saresp de 2008 a 2011 aplicadas para um grupo de 15 alunos de uma escola pública da região da grande São Paulo. Na pesquisa comparamos as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos com uma análise *a priori* do instrumento de coleta de dados procurando identificar as dificuldades encontradas e erros revelados. Para a classificação dos erros utilizamos as categorias: dados mal utilizados, interpretação incorreta de linguagem, inferências logicamente inválidas, teoremas ou definições distorcidos, falta de verificação da solução e erros técnicos, propostas pelos pesquisadores Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

2. Fundamentação teórica

2.1. Concepção sobre atividade algébrica

Kieran (2004) classifica as atividades algébricas em três tipos: geracional, transformacional e meta-nível/global. São exemplos dos primeiro tipo:

> (i) as equações contendo um valor desconhecido que representa uma situação-problema quantitativa, (ii) expressões de generalização decorrentes de padrões geométricos ou sequências numéricas e (iii) expressões de regras que governam relações numéricas (KIERAN, 2004, p. 22-23, tradução nossa).

As atividades transformacionais, segundo Kieran (2004), incluem reduzir termos semelhantes, fatoração, expansão, substituição, adição e multiplicação de expressões polinomiais, a exponenciação de polinômios, resolução de equações, simplificação de expressões, trabalhar com expressões e equações equivalentes, etc.

O terceiro tipo de atividade caracteriza-se quando a Álgebra é utilizada como ferramenta, mas não restritamente ao domínio da própria Álgebra. Nesse tipo de atividade, são incluídos: a resolução de problemas, modelagem, observação de estruturas, estudos de mudanças, generalização, análise de relações, provas e previsões e justificação.

Essa classificação proposta por Kieran (2004) norteou a escolha das questões de Álgebra nos relatórios do Saresp.

2.2. A importância do erro no processo de ensino e aprendizagem

O erro em atividades escolares é um fenômeno recorrente e inerente ao processo de ensino e aprendizagem. Ter um olhar diferenciado sobre os erros que os alunos cometem, significa ter um olhar sobre o modo como eles aprendem. Nesse sentido o erro deve ter o seu lugar previsto no planejamento do professor que deve buscar interpretar o erro do estudante no processo de ensino e aprendizagem como uma maneira de lhe possibilitar a oportunidade de reelaborar seus conhecimentos sobre o objeto de estudo.

É interessante notar que na própria história da construção do conhecimento científico, o erro teve um papel importante. Rico (1995) aponta essa importância ao comentar que:

> O erro é uma possibilidade permanente na aquisição e consolidação do conhecimento e pode chegar a formar parte do conhecimento científico que as pessoas e os grupos utilizam. Esta possibilidade não é uma mera hipótese. Basta observar o que tem ocorrido ao longo da história de diversas disciplinas em que elas têm aceitado como conhecimento válido múltiplos conceitos que, hoje em dia, sabemos que são errôneos. (p. 70)

Nesse sentido, vemos que a ocorrência de erro pode ser uma etapa anterior ao sucesso e, até mesmo, ao avanço do conhecimento. Assim, não se trata de algo ruim, mas de um fenômeno que naturalmente faz parte de todo processo de construção do conhecimento, seja ele científico ou escolar. Outros pesquisadores também destacam o importante papel do erro no processo de ensino.

Cury e*t al.* (2008, p. 1) destacam a importância do estudo do erro ao comentar que "A análise de erros cometidos por estudantes de Matemática é uma das maneiras de compreender suas dificuldades de aprendizagem e auxiliá-los a superá-las."

Almouloud (2010) salienta que para Brousseau (1983):

> o erro é a expressão, ou a manifestação explícita, de um conjunto de concepções espontâneas, ou reconstruídas, que integradas em uma rede coerente de representações cognitivas, tornam-se obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos. (p. 131)

As ideias apresentadas até aqui têm em comum o fato de considerarem o erro como um elemento inerente ao processo de ensino e aprendizagem. Não é possível desenvolver algum conceito, de modo que todos os alunos aprendam da mesma maneira sem que em algum momento erros não se manifestem.

2.3. Análise e categorias de erros em Álgebra

Para as análises dos protocolos dos alunos baseamo-nos na classificação dos erros proposta pelos pesquisadores Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). As categorias estão elencadas a seguir.

2.3.1. Dados mal utilizados

Esta categoria inclui os erros que podem ser identificados, quando ocorre discrepância entre os dados fornecidos na questão e como o aluno os interpreta. Dentro desta categoria encontram-se os casos em que: o aluno acrescenta dados estranhos, despreza dados fornecidos que são necessários à resolução e compensa a falta de informação com dados irrelevantes; admite certas exigências que não são explícitas no problema, atribui a um elemento um significado inconsistente com o texto, utiliza um valor numérico de uma variável para outra variável e faz uma leitura errada do enunciado;

2.3.2. Interpretação incorreta de linguagem

Nesta categoria, enquadram-se os erros caracterizados pela tradução de uma linguagem para outra. Estes erros ocorrem, quando a tradução de uma expressão que está na linguagem natural em um termo matemático ou equação não representa a situação quando esta é descrita verbalmente; quando se utilizam símbolos para realizar uma operação, mas opera-se como se a situação fosse outra e a interpretação é incorreta dos símbolos gráficos.

2.3.3. Inferências logicamente inválidas

Nesta categoria de erros, estão aqueles que se relacionam muito mais a um raciocínio falacioso sobre as informações do que necessariamente a conteúdos específicos. Para Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987):

> A: Concluir a partir de uma instrução condicional (se *p*, então *q*) a conservar tanto em sua forma positiva (se *q*, então *p*) ou em sua forma contrapositiva (se não *p*, então não *q*).
> B: Considerações a partir de uma instrução condicional (se *p*, então *q*) e da sua consequente *q* que o antecedente *p* é válido, ou concluir a partir de uma instrução condicional e a negação de seu antecedente (não *p*) que a negação de seu consequente (não *q*) é válida.
> C: Concluir que *p* implica *q* quando *q* não segue necessariamente a partir de *p*.

ISSN 2178-034X

> D: Utilizar quantificadores lógicos como "todos", "não existe", ou "pelo menos" no lugar errado.
>
> E: Fazer um salto injustificado em uma inferência lógica, ou seja, afirmando que *q* segue de *p* sem fornecer a sequência necessária de argumentos principais de *p* para *q*, ou fornecer argumentos errôneos. (p. 10-11, tradução nossa).

2.3.4. Teoremas ou definições distorcidos

Nesta categoria estão os erros relacionados à distorção de um princípio identificável, uma regra, um teorema ou definição. São elementos dessa categoria:

> A: Aplicar um teorema fora de suas condições (por exemplo, a aplicação da lei dos senos, $\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta}$, em que a e α não pertencem ao mesmo triângulo como b e β).
> B. Aplicar a propriedade distributiva para uma função ou operação não distributiva (por exemplo, $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha + sen\ \beta$; $log\frac{a}{b} = \frac{log\, a}{log\, b}$, $(a+b)^n = a^n + b^n$).
> C: Uma citação imprecisa de uma definição reconhecível, teorema, ou fórmula (em uma parábola, o valor mínimo é de $x_{min} = \frac{b}{a}$ em vez de $x_{min} = \frac{b}{2a}$; $(a \quad b)^2 = a^2 + 2ab \quad b^2$) (MOVSHOVITZ-HADAR, ZASLAVSKY e INBAR, 1987, p. 11-12, tradução nossa).

2.3.5. Falta de verificação da solução

Nesta categoria estão os erros que se caracterizam quando o aluno segue todos os passos para resolver o problema corretamente, mas o resultado final não está de acordo com a pergunta inicialmente proposta. No entanto, se ele verificasse sua resposta levando em conta o enunciado do problema, o erro poderia ser evitado.

2.3.6. Erros técnicos

Nesta categoria incluem-se os erros de cálculo, erros na extração de dados de tabelas, erros na manipulação de símbolos algébricos e outros erros de algoritmos que são estudados na matemática.

3. O Saresp e os relatórios

O Sistema de Avaliação do Ensino do Estado de São Paulo (Saresp) é realizado desde 1999 pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP). Atualmente, de acordo com a SEE-SP, o Saresp tem como finalidade:

> produzir informações consistentes, periódicas e comparáveis sobre a situação da escolaridade básica na rede pública de ensino paulista, visando orientar os gestores do

> ensino no monitoramento das políticas voltadas para a melhoria da qualidade educacional. (SÃO PAULO, 2013).

No ano seguinte ao da aplicação da prova, a SEE-SP publica relatórios com os resultados dos alunos que serve de consulta para gestores, coordenadores e professores da rede, a fim de tomarem conhecimento a respeito da aprendizagem dos alunos. Esses relatórios apresentam as questões abordadas na prova e o desempenho dos alunos nestas questões.

4. Procedimentos metodológicos

4.1. Objetivos e problema de pesquisa

Os resultados apresentados pelos relatórios pedagógicos do Saresp têm revelado que o desempenho dos alunos em questões que envolvem Álgebra estão abaixo do que se espera para o ano/série avaliados. Tendo em vista esse fato propusemos a seguinte questão de pesquisa:

Quais são as estratégias utilizadas, as dificuldades e os erros cometidos pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II ao resolverem questões de Álgebra que estão presentes nos relatórios pedagógicos do Saresp dos anos de 2008, 2009, 2010 e 2011?

Partindo desta questão tínhamos como objetivo principal analisar as estratégias utilizadas com foco nos erros cometidos pelos alunos ao resolverem um instrumento elaborado por nós, contendo 13 questões de Álgebra retiradas dos relatórios pedagógicos do Saresp dos anos de 2008 a 2011. Neste artigo apresentaremos a análise e os resultados de três questões.

É importante salientar que neste artigo apresentaremos a análise *a priori* e a análise dos erros dos alunos em relação a três questões.

4.2. Construção do instrumento de coleta

Para a escolha das questões nos relatórios pedagógicos do Saresp baseamo-nos na classificação de atividade algébrica proposta por Kieran (2004). No quadro a seguir, estão as classificações e as questões relacionadas a elas. As questões de número 6, 11 e 12, relativas ao tipo de Atividade Transformacional serão apresentadas nesse artigo.

Quadro 1 - Classificação das questões do instrumento de coleta de dados

Tipo de atividade	Nº da questão
Geracional	Questão 1
	Questão 8
	Questões 7 e 10
	Questão 3
Transformacional	Questão 2
	Questão 5
	Questões 6, 11 e 12
Meta-nível/global	Questão 4
	Questão 9
	Questão 13

Fonte: elaborado pelo autor

4.3. Análise *a priori* das questões

Fizemos uma análise *a priori* de todas as questões do instrumento de coleta de dados a fim de antecipar possíveis estratégias de resolução dos alunos. Desta forma poderíamos verificar diferentes estratégias, dificuldades e erros. Apresentaremos a seguir as análises referentes às questões 6, 11 e 12.

Questão 6 - Considerando os polinômios $A = x - 2$, $B = 2x + 1$ *e* $C = x$, *qual é o valor mais simplificado para a expressão* $A \, . \, A - B + C$?

Resolução possível

Para resolver essa questão, o aluno primeiro precisava organizar os cálculos substituindo os valores de A, B e C na expressão $A.A - B + C$.

Após essa substituição, a expressão ficaria da seguinte forma: $(x - 2).(x - 2) - (2x + 1) + x$

Resolvendo cada uma das expressões separadamente, temos:

$(x - 2).\ (x - 2) = x^2 - 4x + 4$

$- (2x + 1) = - 2x - 1$

Reorganizando a expressão, teremos: $x^2 - 4x + 4 - 2x - 1 + x = x^2 - 5x + 3$.

Resposta: $x^2 - 5x + 3$.

Questão 11. Observe a figura

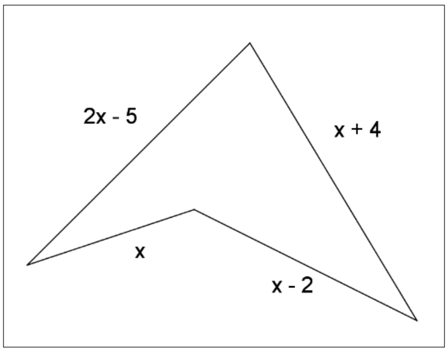

Figura 1

Determine a expressão que representa o perímetro da figura.

Resolução possível

Somando todos as medidas dos lados da figura, temos :

$2x - 5 + x + 4 + x - 2 + x = 5x - 3$

Resposta: $5x - 3$.

Questão 12. Ao calcular a multiplicação $(x + 2) . (2x + 1)$*, obtém-se:*

Resolução possível

$(x + 2) . (2x +1) = 2x^2 + x + 4x + 2 = 2x^2 + 5x + 2$

Resposta: $2x^2 + 5x + 2$.

4.4. Análise dos dados

Questão 6 - Considerando os polinômios $A = x - 2$, $B = 2x + 1$ *e* $C = x$*, qual é o valor mais simplificado para a expressão* $A . A - B + C$*?*

Resoluções corretas	Resoluções erradas	Em branco
2	12	1

Nas análises referentes a essa questão notamos muita dificuldade e erros dos alunos na multiplicação de binômios, na eliminação dos parênteses, em regras de sinais na multiplicação envolvendo o produto de números inteiros e ao escreverem a expressão final. Classificamos esses erros como sendo técnicos.

ISSN 2178-034X

Apresentamos a seguir o protocolo de um aluno que apresentou dificuldades em relação à multiplicação dos binômios ao eliminar dos parênteses.

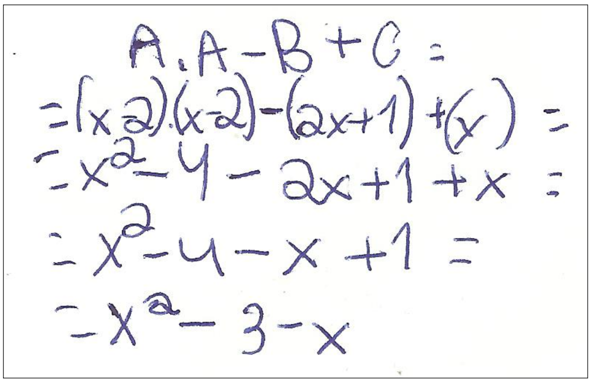

Figura 2

Questão 11 - Observe a figura

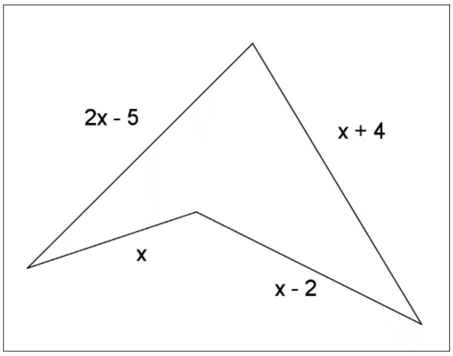

Figura 3

Determine a expressão que representa o perímetro da figura.

Resoluções corretas	Resoluções erradas	Em branco
11	3	1

Os alunos, em sua maioria, conseguiram resolver essa questão corretamente. Um dos alunos, cujo protocolo apresentamos a seguir, utilizou somente os dois polinômios referentes à medida de dois lados da figura. Nesse caso, classificamos esse erro na categoria de dados mal utilizados.

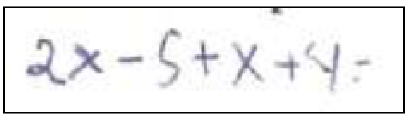

Figura 4

Os outros dois alunos que erraram, escreveram os lados da figura na expressão corretamente, mas erraram em operações com números inteiros. Estes erros foram classificados como técnicos.

No próximo protocolo o aluno efetuou: -5 -2 + 4 = 11.

$$P = 2x - 5 + x + x - 2 + x + 4$$
$$P = 2x + 3x + 11$$
$$P = 5x + 11$$

Figura 5

Já no protocolo a seguir o aluno calculou: -5 -2 = - 3.

$$P = 2x - 5 + x + 4 + x + x - 2$$
$$P = 5x - 3 + 4$$

Figura 6

Questão 12 - Ao calcular a multiplicação (x + 2) . (2x + 1), obtém-se:

Resoluções corretas	Resoluções erradas	Em branco
10	5	0

Os erros revelados nessa questão mostraram dificuldades dos alunos com a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Um aluno aplicou corretamente a propriedade, mas equivocou-se ao efetuar $x.2x = 3x^2$.

$$(x + 2) . (2x + 1)$$
$$3x^2 + 1x + 4x + 2$$
$$3x^2 + 5x + 2$$

Figura 7

ISSN 2178-034X

Quatro alunos parecem desconhecer essa propriedade. O protocolo a seguir servirá como exemplo desse tipo de dificuldade.

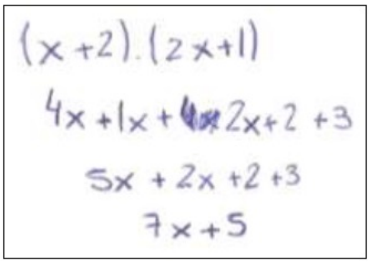

Figura 8

Nas questões acima, o nosso objetivo foi apresentar a análise das estratégias dos alunos com foco nos erros cometidos em questões de Álgebra presentes na avaliação do Saresp, que pode se constituir em uma fonte importante de questões. Analisar as estratégias utilizadas, buscando identificar erros e dificuldades pode ajudar o professor a compreender melhor como os alunos têm aprendido matemática.

5. Considerações finais

Os erros cometidos pelos alunos ao resolverem situações-problema de matemática revelam tanto a falta de conhecimento, como concepções equivocadas sobre determinados conteúdos matemáticos. Corrigir as produções dos alunos classificando-as como erradas, sem buscar uma causa dos erros é uma atitude que não contribui com a aprendizagem dos estudantes. Mas se em vez disso, o professor realizar a análise das estratégias buscando compreender como pensam ao resolverem as tarefas propostas poderá identificar dificuldades e erros que ao serem trabalhados ajudará os alunos a aprenderem os conteúdos de matemática.

A visão do erro como um elemento inerente ao processo de ensino e aprendizagem supera uma concepção de erro como um fenômeno indesejável e pode ajudar o professor na construção de propostas de ensino que auxilie o aluno na superação das suas dificuldades.

Uma proposta de ensino que contemple a análise de erros com uma de suas etapas pode ser a diferença entre o sucesso do aprendizado do aluno ou o seu fracasso. Nesse sentido a prova do Saresp, por ser planejada de acordo com os conteúdos que os alunos já devem dominar tendo em vista o ano escolar que se encontram, é uma fonte interessante que pode ser utilizada pelo professor para a seleção de questões para esse trabalho.

6. Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2010.

KIERAN, C. **The core of algebra: reflections on its main activities**. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.). The future of the teaching and learning of álgebra: the 12th ICMI study. Dordrecht: Kluwer, pp. 21-33, 2004.

CURY, H. N. *et al.* **Análise de erros: um recurso para a aprendizagem de futuros Professores de matemática.** (2008). Disponível em http://www.unifra.br/professores/13935/Cury-Badajoz.pdf. Acesso em 01 de março de 2016.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. **An empirical classification model for errors in high school mathematics**. Journal for Research in Mathematics Education, v.18, n.1, pp. 3-14, 1987.

RICO, L. **Errores y dificuldades em el aprendizaje de las matemáticas.** In: KILPATRICK, J., GOMES, P.e RICO, L. Educacion Matemática. Colômbia: Grupo Editorial Iberoamérica, pp.69-108, 1995.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Saresp 2013**. Disponível em http://saresp.fde.sp.gov.br/2013/. Acesso em 20 de outubro de 2013.

ISSN 2178-034X