POLIEDROS DE PLATÃO SOB UMA PERSPECTIVA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA USANDO RECURSOS DIDÁTICOS CONCRETOS E VIRTUAIS

Cristian Roberto Miccerino de Almeida
Secretaria da Educação da Prefeitura Municipal de Campinas
almeidacrm@ig.com.br

Ana Maria Martensen Roland Kaleff
Universidade Federal Fluminense
anakaleff@vm.uff.br

Resumo:

O presente artigo trata de um estudo com vistas a uma dissertação de Mestrado Profissional, o qual teve origem em uma disciplina de curso de especialização. Nessa, o autor, orientado pela autora, teve a oportunidade de construir um conjunto de recursos didáticos destinados à sala de aula, utilizando materiais concretos de baixo custo e de desenvolver atividades para incrementar habilidades geométricas. No intuito de tornar dinâmicas e mais prazerosas as aulas de Geometria, procurou-se expandir um pequeno laboratório de ensino e durante o Mestrado, ampliou-se o estudo envolvendo poliedros regulares de Platão e seus duais com uma revisão teórica dedicada aos professores, diversas ações complementares para construção de seus modelos e se explorou também suas construções interativas, por meio de aplicações no software GeoGebra. Este artigo é finalizado com a apresentação de um exemplo de uma dessas abordagens de construção.
Palavras-chave: Poliedros; Geometria Espacial; GeoGebra; Modelos Concretos; Modelos Virtuais.

1. Introdução

O presente relato trata de um estudo realizado em 2014, com vistas à redação de uma dissertação de conclusão de um Curso de Mestrado Profissional. Tal estudo deu continuidade a outro que teve origem em uma disciplina de curso de especialização lato sensu. Neste, em meados de 2011, o autor cursou uma disciplina relacionada a tópicos para o ensino de Geometria, orientada pela professora autora desse artigo.

Nessa disciplina, o autor teve a oportunidade de construir um conjunto de recursos pedagógicos concretos que serviu como um laboratório de ensino utilizado até hoje em suas salas de aula. Visto que a questão custo/benefício sempre esteve pautada no decorrer da disciplina para construir os modelos manipulativos de sólidos geométricos e representar algumas seções planas dos poliedros, utilizaram-se materiais pedagógicos de baixo custo (canudos plásticos coloridos, linha, agulha de tapeçaria, cola e folha de plástico transparente), apropriados para a manipulação. Conjuntamente aos recursos concretos foram criadas atividades para incrementar habilidades geométricas.

Além disso, no final de 2011, o autor teve a oportunidade de conhecer o Museu Interativo Itinerante de Educação Matemática (LEGI) do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG) da Universidade Federal Fluminense (UFF). Nessa ocasião, foi levado a entender as diretrizes pedagógicas que podem direcionar um laboratório sob uma perspectiva de Educação Matemática, pois no LEG é buscado se educar pela Matemática. Em outras palavras, segundo Kaleff, além da formação matemática, nesse Laboratório, visa-se a formação integral do aluno, busca-se levá-lo a se encontrar como ser humano e cidadão, a se estabelecer como ser crítico, consciente da sua condição de sujeito em transformação, integrado à sua natureza interior e atuar como participante ativo na construção de seu destino e de sua história (KALEFF, 2012).

Esse encontro marcou e muito a vida do autor, dentro e fora da sala de aula. Em 2013, ele teve a oportunidade de participar do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), campus de Campinas, (UNICAMP) no contexto da Universidade Aberta do Brasil (UAB), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Esse programa é voltado aos professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente.

Assim, no intuito de expandir o seu pequeno laboratório de ensino de Geometria, com apoio total do seu orientador de Mestrado, o autor realizou uma dissertação com início em 2014, cujo título foi "SÓLIDOS DE PLATÃO E SEUS DUAIS: Construção com material concreto e representações por GeoGebra" (ALMEIDA, 2015).

No texto da dissertação, são apresentados alguns aspectos históricos e tecnológicos os quais envolvem sugestões de diversas maneiras do professor de matemática deixar a sua aula mais atrativa e agradável, com vistas a uma aprendizagem significativa dos conceitos geométricos, pois são analisados cada um dos poliedros regulares de Platão e seus respectivos duais.

Na apresentação de cada poliedro, inicialmente realiza-se uma revisão teórica dedicada tanto aos professores em exercício quanto ao licenciando e estudantes em geral. Nessa revisão, a partir da aresta do poliedro, o leitor é levado a acompanhar detalhadamente todos os cálculos referentes ao tamanho da aresta, da área e do volume, do sólido, bem como a estabelecer comparações entre as medidas da sua aresta com a do dual ou com a de um poliedro inscrito.

Ainda, no texto da dissertação, baseado no estudo de poliedros regulares de Platão, o autor busca levar o aluno a construir modelos de poliedros e seus duais usando material concreto e considerando inscrições, planificações e seções de poliedros, o que, segundo Kaleff, se percebe ajudar, e muito, o aluno a compreender as diversas propriedades geométricas (KALEFF, 2003; 2008).

Ao final da apresentação de cada poliedro, por meio de uma aplicação realizada no software GeoGebra (http://www.geogebra.org), é apresentado como o aluno pode acompanhar virtualmente todo o processo de construção do poliedro e a representação do seu dual. Podendo ainda, observar individualmente cada um dos elementos (vértice, faces e arestas) do poliedro e rever as propriedades geométricas através de opções de aprofundamento.

Finalmente, na dissertação, são apresentadas algumas considerações e conclusões relativas ao desenvolvimento do estudo. Entre elas, salienta-se a seção do Anexo, na qual se encontram informações sobre a razão áurea, detalhamento do pentágono regular, incluindo uma construção usando régua e compasso, outra forma de calcular o volume dos poliedros e as planificações dos poliedros utilizando esses instrumentos.

2. Justificativa para o Estudo

Os poliedros por sua vez, constituem em uma unidade didática que se faz importante no ensino da geometria básica, na medida em que o aluno necessita compreender os padrões que se conservam, as igualdades e diferenças entre as várias figuras geométricas, sendo que a ligação entre estas e o objeto real (modelo do sólido) possibilita a comparação e a percepção de suas formas, composição e decomposição de uma representação plana para outra espacial e vice-versa.

Cabem aqui, algumas considerações importantes sobre o estudo de poliedros, pois com relação ao ensino de conceitos de Geometria, a principal habilidade para o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno no processo ensino e aprendizagem é a de visualização.

Conforme é afirmado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) tem-se:

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As Figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades (BRASIL, 1997, p. 127).

Dessa forma, a visualização é um processo cognitivo complexo e de caráter individual, no qual a experiência tem grande importância; ou seja, o que uma pessoa observa pode não ser visto, ou percebido, por outra. Como considerado por Kaleff:

> Apesar das muitas controvérsias sobre a forma pela qual a visualização se processa em nossa mente, é importante que ocupe seu lugar no ensino da Geometria, pois a habilidade da visualização pode ser desenvolvida até certo ponto, se for disponibilizado ao indivíduo um apoio didático baseado em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo. O material concreto permite ao indivíduo efetivamente ver o objeto de seu estudo. Por outro lado, como a habilidade da visualização não é inata a todos os indivíduos, o que acarreta a existência de indivíduos "visualizadores" e indivíduos "não-visualizadores", podem surgir grandes conflitos em sala de aula, pela confrontação de alunos visualizadores e professores não-visualizadores e vice-versa, se os profissionais não estiverem conscientes deste fato (KALEFF, 2003, p. 17).

Nesse sentido, a página de um livro ou a lousa, em geral, não são os instrumentos mais apropriados para auxiliar a visualização de objetos tridimensionais. No entanto, na maioria das vezes, o professor dispõe apenas do livro didático como ferramenta ao ensino da geometria.

Lorenzato (1995) justifica a necessidade do ensino de geometria, pelo fato de que, um indivíduo, sem este conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas. Assim, através da análise e descrição crítica de formas, da escrita e das diferentes representações de elementos geométricos, todo o processo deve ser conjuntamente desenvolvido e deve ser constante no ensino e aprendizagem da Geometria.

Pelo apresentado, os recursos didáticos concretos manipulativos modeladores de sólidos podem ser um interessante caminho para desenvolver o assunto na sala de aula e podem também ajudar a fortalecer o significado das noções geométricas elementares no intuito de que o aluno reconheça as conexões entre ideias e aplicações matemáticas e não apenas da percepção da Matemática, particularmente da Geometria, como um corpo de conceitos e procedimentos isolados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.

Por outro lado, cada vez mais, o uso dos computadores nas escolas, em especial por meio dos softwares de geometria dinâmica, de forma educativa e articulada, torna-se uma ferramenta potente para a Educação. Percebe-se que os alunos se sentem mais motivados por utilizar um recurso diferenciado e podem aprimorar seus conhecimentos matemáticos uma vez que a exploração das construções desenhadas nesses ambientes virtuais podem constituir estratégias poderosas para a aprendizagem da Geometria, desde que inseridas em contextos específicos, entendidos como o conjunto de inter-relações que se estabelecem entre alunos, professores e software educativos.

Portanto, aliar os recursos concretos aos virtuais, faz parte dos estudos que envolvem a aprendizagem significativa e a visualização geométrica. Nessa perspectiva, Bairral (2005) considera que os cursos de formação de professores devem oferecer aos futuros docentes oportunidades de conhecer e utilizar novas ferramentas para enfrentar as situações de ensino-aprendizagem da Matemática, principalmente, quando envolvem conteúdos da Geometria. Com isso, esses podem ser trabalhados com a utilização de material concreto e virtual, possibilitando uma educação significativa e um despertar de interesse do aluno até pela História da Matemática.

Frente a tudo isso, o uso das novas tecnologias pode contribuir para práticas pedagógicas inovadoras, desde que sejam baseadas em novas concepções de conhecimento tanto do aluno, quanto do professor já que as novas tecnologias podem propiciar novas concepções de ensino e aprendizagem, podemos explorá-la na elaboração de materiais didáticos e também, como recurso didático à prática pedagógica.

3. Objetivo e Metodologia

Resumidamente, o objetivo geral da dissertação aqui apresentada é, portanto, levar tanto os professores em exercício quanto o licenciando e estudantes em geral a analisar os poliedros regulares de Platão e seus duais, explorando suas características e sua história. Primeiramente com a utilização de materiais manipulativos concretos e, em seguida, com a construção de modelos no software GeoGebra.

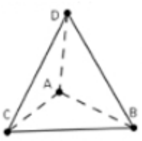
Sob a perspectiva apresentada, baseado nos estudos sobre poliedros de Platão segundo Kaleff, (KALEFF, 2003; 2008), na dissertação em questão, analisam-se os poliedros de Platão e seus duais, explora-se suas características e sua história com a utilização de materiais concretos e virtuais como auxilio da aprendizagem uma vez que o trabalho com tais recursos didáticos pode contribuir no processo de ensino aprendizagem, proporcionando uma melhor compreensão do pensamento geométrico ao aluno.

Por sua vez, ao se introduzir ainda o uso do computador na construção e identificação das Figuras geométricas para representar estruturas em tridimensional ou bidimensional para representar poliedros e observar características, privilegiando arestas e vértices, o trabalho conjunto com material concreto em sala de aula pode auxiliar o desenvolvimento do pensamento intuitivo do aluno e vir a proporcionar a chance de estabelecer conjecturas as quais, provavelmente, não faria em uma aula teórica tradicional.

Buscou-se explorar a construção de modelos dos poliedros regulares de Platão com material de baixo custo por meio de apresentações do passo a passo disponibilizados em esquemas gráficos ou através de uma representação realizada no software de geometria dinâmica. A seguir, à guisa de ilustração, apresenta-se como, na dissertação, foi tratado o modelo do tetraedro regular.

4. Exemplo da apresentação do Tetraedro Regular: modelos concreto e virtual

Para estudar o poliedro o autor divide o capítulo sobre a representação do tetraedro regular em: revisão teórica, construção do modelo do poliedro com material concreto e a sua construção no software GeoGebra.



O filósofo grego Platão estabelecia uma ligação dos poliedros com as forças da natureza. Hoje é possível estudar as formas moleculares (por exemplo, CH_4, SiF_4 e CH_2Cl_2), existentes na natureza e observar as ideias que Platão teve por volta do século V e IV a.C.

Segundo Platão, o poliedro mais "pontudo", com arestas mais cortantes, com menor número de faces e o de maior mobilidade. Representante do elemento fogo, dada sua forma, suas pontas agudas explicariam a propriedade destrutiva e penetrante do calor.

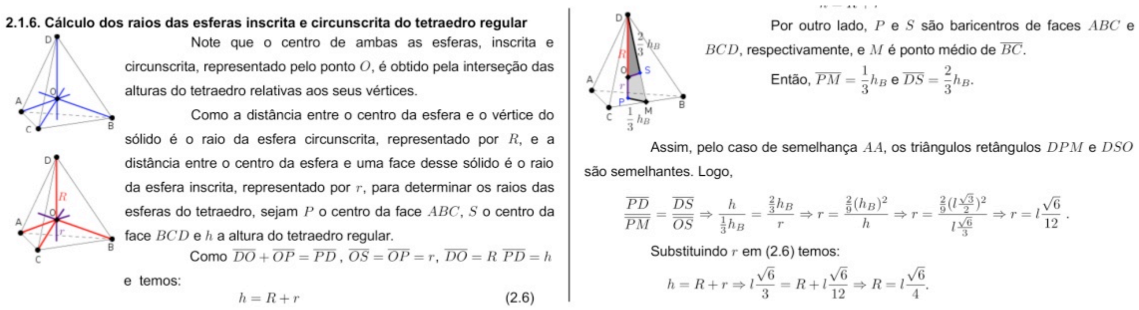
Esse sólido é formado por 4 vértices (A, B, C e D), 6 arestas ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$), 4 faces triangulares (ABC, ABD, ACD e BCD), e 3 arestas que concorrem em cada vértice.

Figura 1 - Revisão Teórica: História da Matemática

Na revisão teórica, além da presença da história da Matemática (Figura 1), o aluno pode acompanhar, a partir da aresta do tetraedro, detalhadamente a análise de todos os

ISSN 2178-034X

cálculos referentes aos raios das esferas inscrita e circunscritas (Figura 2), ao volume, à área do sólido, e da aresta de um poliedro inscrito ou do dual. Note que a dualidade é considerada em termos de reciprocidade polar sobre uma determinada esfera, o que permite determinar o dual de um poliedro qualquer, contudo, o processo utilizado para obter os duais dos platônicos não pode ser estendido a todos os poliedros.



2.1.6. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do tetraedro regular

Note que o centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O, é obtido pela interseção das alturas do tetraedro relativas aos seus vértices.

Como a distância entre o centro da esfera e o vértice do sólido é o raio da esfera circunscrita, representado por R, e a distância entre o centro da esfera e uma face desse sólido é o raio da esfera inscrita, representado por r, para determinar os raios das esferas do tetraedro, sejam P o centro da face ABC, S o centro da face BCD e h a altura do tetraedro regular.

Como $\overline{DO} + \overline{OP} = \overline{PD}$, $\overline{OS} = \overline{OP} = r$, $\overline{DO} = R$ $\overline{PD} = h$ e temos:

$$h = R + r \qquad (2.6)$$

Por outro lado, P e S são baricentros de faces ABC e BCD, respectivamente, e M é ponto médio de $\overline{BC}$.

Então, $\overline{PM} = \frac{1}{3}h_B$ e $\overline{DS} = \frac{2}{3}h_B$.

Assim, pelo caso de semelhança AA, os triângulos retângulos DPM e DSO são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{DS}}{\overline{OS}} \Rightarrow \frac{h}{\frac{1}{3}h_B} = \frac{\frac{2}{3}h_B}{r} \Rightarrow r = \frac{\frac{2}{9}(h_B)^2}{h} \Rightarrow r = \frac{\frac{2}{9}(l\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{l\frac{\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow r = l\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Substituindo r em (2.6) temos:

$$h = R + r \Rightarrow l\frac{\sqrt{6}}{3} = R + l\frac{\sqrt{6}}{12} \Rightarrow R = l\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Figura 2 - Revisão Teórica: Cálculos referentes aos raios das esferas inscrita e circunscritas

Para facilitar o processo de construção do modelo do poliedro utilizando material concreto, como mostrado na Figura 3, todos os canudos são enumerados (item a) e sinalizado o trajeto da linha que os unirá, por meio de um esquema gráfico em concordância com o esquema descrito em quatro passos (item b).

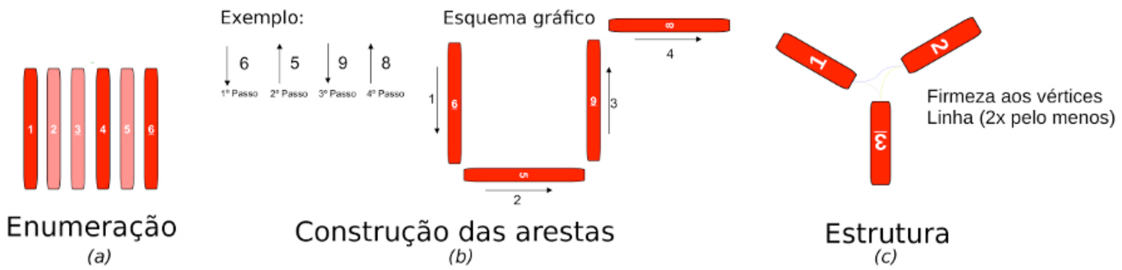
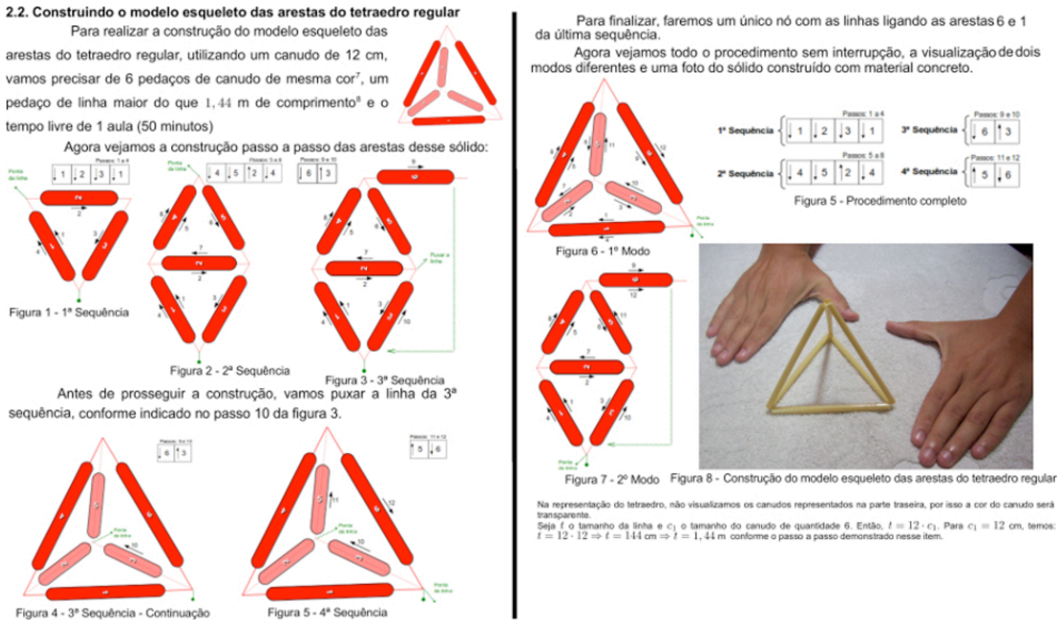


Figura 3 - Cuidados no processo de construção

Dessa forma, o leitor é levado a considerar que alguns cuidados no processo de construção são importantes, como o de nunca deixar somente um fio saindo de um canudo, porque para dar firmeza aos vértices de uma estrutura com canudos é necessário que passe o fio de linha mais de uma vez por cada pedaço de canudo ligando-o aos outros, conforme exibido no item c da Figura 3 (KALEFF, 2003, p. 129).

Em contrapartida, ainda dentre os cuidados a serem tomados durante o processo de construção, não é interessante que sejam dados muitos nós na linha, para que não causem obstrução à sua passagem. A linha, como lembra Kaleff, deve ser um pouco mais grossa do que a normalmente usada para empinar pipa, pois o uso de uma mais fina pode danificar o plástico do canudo.


2.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular

Para realizar a construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular, utilizando um canudo de 12 cm, vamos precisar de 6 pedaços de canudo de mesma cor[7], um pedaço de linha maior do que $1,44$ m de comprimento[8] e o tempo livre de 1 aula (50 minutos)

Agora vejamos a construção passo a passo das arestas desse sólido:

Figura 1 - 1ª Sequência

Figura 2 - 2ª Sequência

Figura 3 - 3ª Sequência

Antes de prosseguir a construção, vamos puxar a linha da 3ª sequência, conforme indicado no passo 10 da figura 3.

Figura 4 - 3ª Sequência - Continuação

Figura 5 - 4ª Sequência

Para finalizar, faremos um único nó com as linhas ligando as arestas 6 e 1 da última sequência.

Agora vejamos todo o procedimento sem interrupção, a visualização de dois modos diferentes e uma foto do sólido construído com material concreto.

Figura 5 - Procedimento completo

Figura 6 - 1º Modo

Figura 7 - 2º Modo

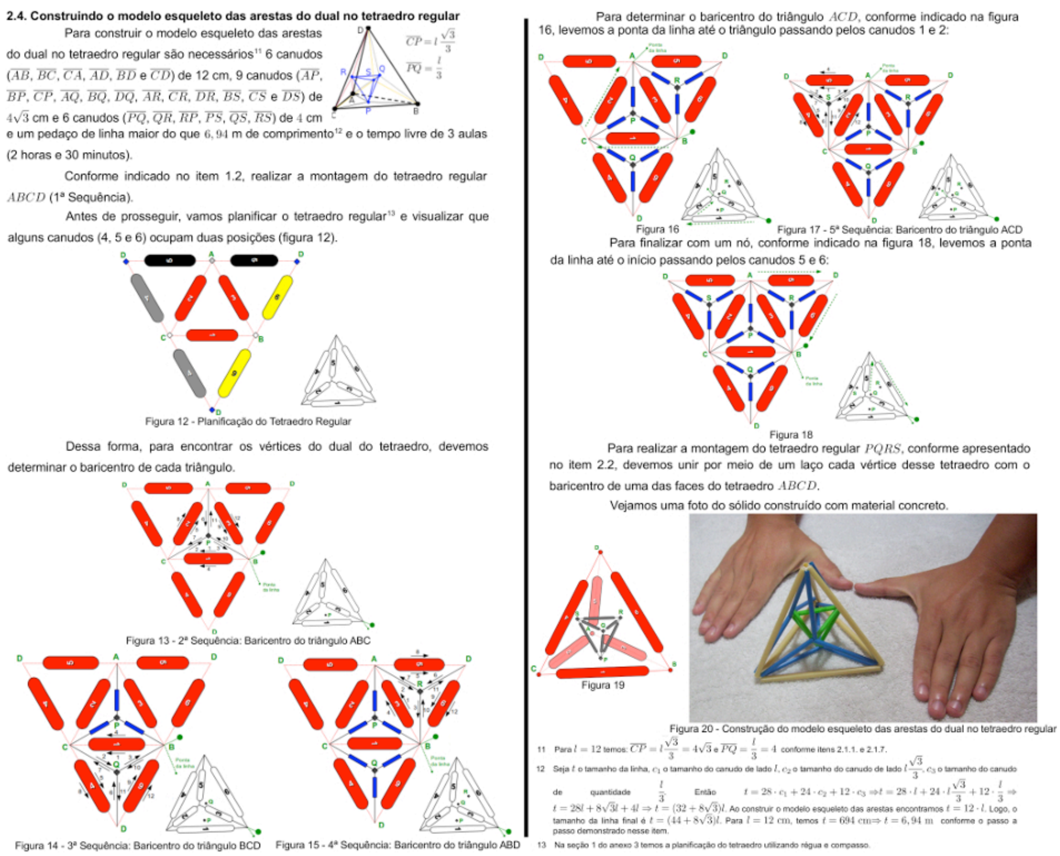
Figura 8 - Construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular

Na representação do tetraedro, não visualizamos os canudos representados na parte traseira, por isso a cor do canudo será transparente.

Seja t o tamanho da linha e c_1 o tamanho do canudo de quantidade 6. Então, $t = 12 \cdot c_1$. Para $c_1 = 12$ cm, temos: $t = 12 \cdot 12 \Rightarrow t = 144$ cm $\Rightarrow t = 1,44$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

Figura 4 - Construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro

Conforme exibido na Figura 5, apresenta-se a construção do modelo esqueleto das arestas do dual do tetraedro regular.


2.4. Construindo o modelo esqueleto das arestas do dual no tetraedro regular

Para construir o modelo esqueleto das arestas do dual no tetraedro regular são necessários[11] 6 canudos ($\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AD}, \overline{BD}$ e $\overline{CD}$) de 12 cm, 9 canudos ($\overline{AP}$, $\overline{BP}, \overline{CP}, \overline{AQ}, \overline{BQ}, \overline{DQ}, \overline{AR}, \overline{CR}, \overline{DR}, \overline{BS}, \overline{CS}$ e $\overline{DS}$) de $4\sqrt{3}$ cm e 6 canudos ($\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}, \overline{PS}, \overline{QS}, \overline{RS}$) de 4 cm e um pedaço de linha maior do que $6,94$ m de comprimento[12] e o tempo livre de 3 aulas (2 horas e 30 minutos).

$\overline{CP} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{PQ} = \frac{l}{3}$

Conforme indicado no item 1.2, realizar a montagem do tetraedro regular $ABCD$ (1ª Sequência).

Antes de prosseguir, vamos planificar o tetraedro regular[13] e visualizar que alguns canudos (4, 5 e 6) ocupam duas posições (figura 12).

Figura 12 - Planificação do Tetraedro Regular

Dessa forma, para encontrar os vértices do dual do tetraedro, devemos determinar o baricentro de cada triângulo.

Figura 13 - 2ª Sequência: Baricentro do triângulo ABC

Figura 14 - 3ª Sequência: Baricentro do triângulo BCD

Figura 15 - 4ª Sequência: Baricentro do triângulo ABD

Para determinar o baricentro do triângulo ACD, conforme indicado na figura 16, levemos a ponta da linha até o triângulo passando pelos canudos 1 e 2:

Figura 16

Figura 17 - 5ª Sequência: Baricentro do triângulo ACD

Para finalizar com um nó, conforme indicado na figura 18, levemos a ponta da linha até o início passando pelos canudos 5 e 6:

Figura 18

Para realizar a montagem do tetraedro regular $PQRS$, conforme apresentado no item 2.2, devemos unir por meio de um laço cada vértice desse tetraedro com o baricentro de uma das faces do tetraedro $ABCD$.

Vejamos uma foto do sólido construído com material concreto.

Figura 19

Figura 20 - Construção do modelo esqueleto das arestas do dual no tetraedro regular

11 Para $l = 12$ temos: $\overline{CP} = l\frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ e $\overline{PQ} = \frac{l}{3} = 4$ conforme itens 2.1.1. e 2.1.7.

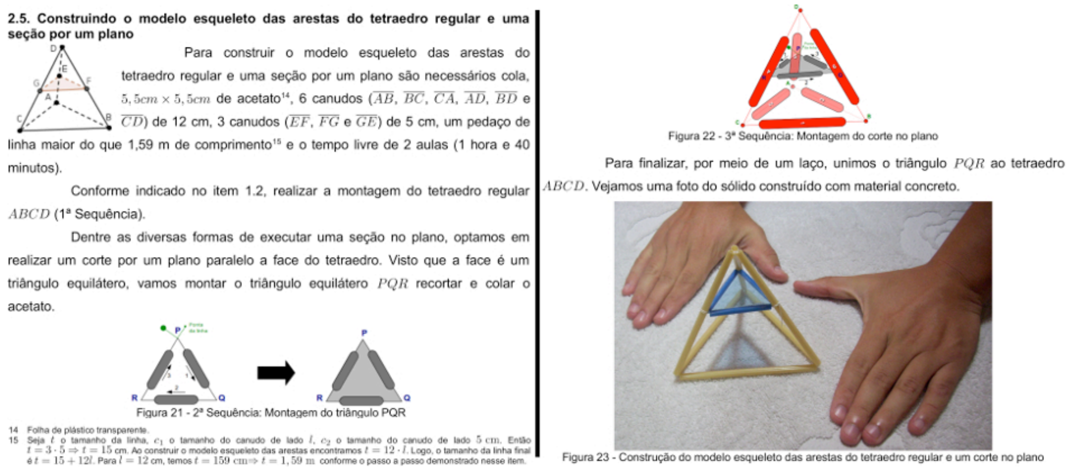
12 Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l, c_2 o tamanho do canudo de lado $l\frac{\sqrt{3}}{3}$, c_3 o tamanho do canudo de quantidade $\frac{l}{3}$. Então $t = 28 \cdot c_1 + 24 \cdot c_2 + 12 \cdot c_3 \Rightarrow t = 28 \cdot l + 24 \cdot l\frac{\sqrt{3}}{3} + 12 \cdot \frac{l}{3} \Rightarrow t = 28l + 8\sqrt{3}l + 4l \Rightarrow t = (32 + 8\sqrt{3})l$. Ao construir o modelo esqueleto das arestas encontramos $t = 12 \cdot l$. Logo, o tamanho da linha final é $t = (44 + 8\sqrt{3})l$. Para $l = 12$ cm, temos $t = 694$ cm $\Rightarrow t = 6,94$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

13 Na seção 1 do anexo 3 temos a planificação do tetraedro utilizando régua e compasso.

Figura 5 - Construção do modelo esqueleto das arestas do dual no tetraedro

ISSN 2178-034X

Usando canudo, linha, folha de plástico transparente e cola, é possível levar o aluno a construir uma seção do modelo por um plano. E, conforme mostrado na Figura 6, tem-se um corte por um plano paralelo à face do tetraedro.



2.5. Construindo o modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e uma seção por um plano

Para construir o modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e uma seção por um plano são necessários cola, $5,5cm \times 5,5cm$ de acetato[14], 6 canudos ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$) de 12 cm, 3 canudos ($\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GE}$) de 5 cm, um pedaço de linha maior do que 1,59 m de comprimento[15] e o tempo livre de 2 aulas (1 hora e 40 minutos).

Conforme indicado no item 1.2, realizar a montagem do tetraedro regular $ABCD$ (1ª Sequência).

Dentre as diversas formas de executar uma seção no plano, optamos em realizar um corte por um plano paralelo a face do tetraedro. Visto que a face é um triângulo equilátero, vamos montar o triângulo equilátero PQR recortar e colar o acetato.

Figura 21 - 2ª Sequência: Montagem do triângulo PQR

14 Folha de plástico transparente.
15 Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l, c_2 o tamanho do canudo de lado 5 cm. Então $t = 3 \cdot 5 \Rightarrow t = 15$ cm. Ao construir o modelo esqueleto das arestas encontramos $t = 12 \cdot l$. Logo, o tamanho da linha final é $t = 15 + 12l$. Para $l = 12$ cm, temos $t = 159$ cm $\Rightarrow t = 1,59$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

Figura 22 - 3ª Sequência: Montagem do corte no plano

Para finalizar, por meio de um laço, unimos o triângulo PQR ao tetraedro $ABCD$. Vejamos uma foto do sólido construído com material concreto.

Figura 23 - Construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e um corte no plano

Figura 6 - Construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro e uma seção por um plano

Na Figura 7, apresenta-se a aplicação realizada no software GeoGebra. Embora o ambiente 3D seja nativo nesse ambiente a partir da sua versão 5.0, o consumo exagerado de memória e processamento fez com que o autor criasse um aplicativo para representar o espaço tridimensional no GeoGebra de acordo com os resultados de Park e seus colaboradores para a exploração da aplicação (PARK ET AL, 2010).

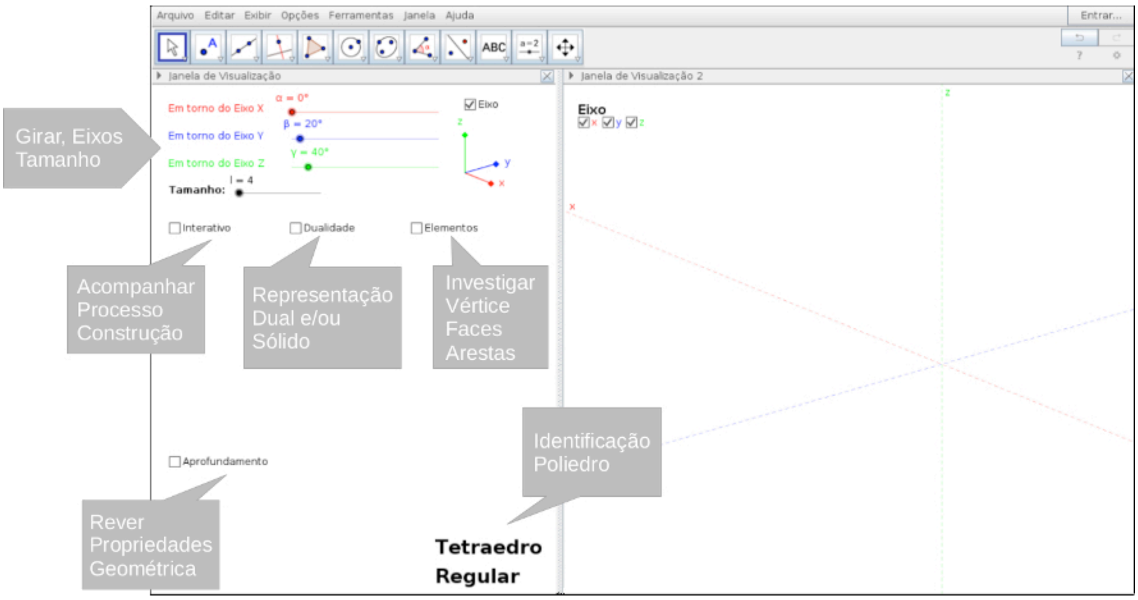


Figura 7 - Entendendo a aplicação feita no Software GeoGebra

Para obter a melhor exibição na aplicação, são utilizadas duas janelas de visualização no software. Na janela de visualização 2, apresenta-se o resultado final, ao passo que na outra janela, além do aluno poder alterar o tamanho do sólido, exibir e girar os eixos, ele pode também exibir as opções Interativo, Dualidade, Elementos e Aprofundamento que serão explicadas a seguir.

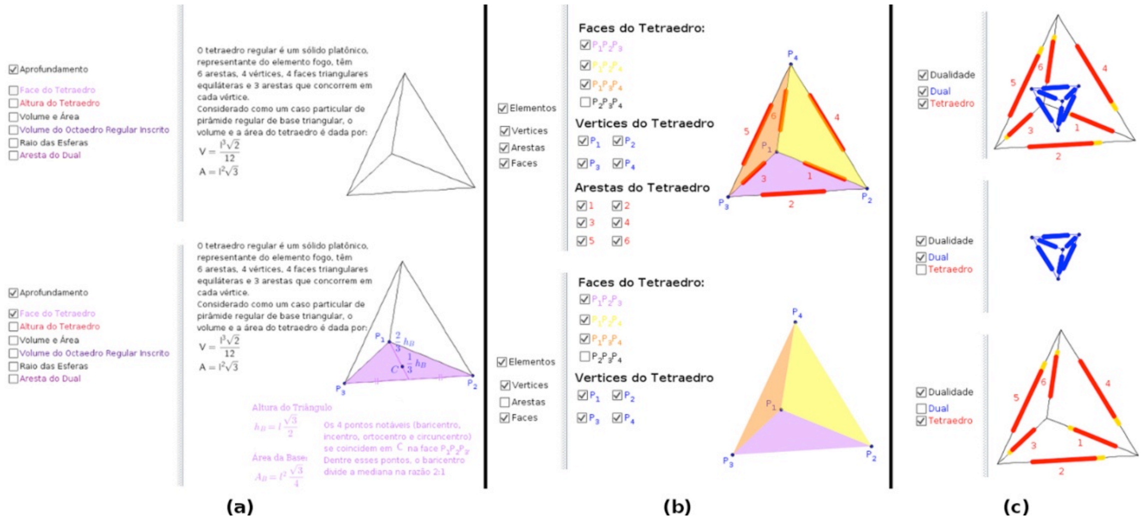


Figura 8 - Explorando as opções Aprofundamento, Elementos e Dualidade

Conforme mostrado na figura 8, o aluno pode rever as propriedades geométricas do poliedro apresentadas na revisão teórica selecionando na opção Aprofundamento (item a). Caso queira investigar vértices, faces e arestas deve selecionar a opção Elementos (item b). Na opção Dualidade (item c), é possível exibir os dois sólidos, apenas o dual ou somente o tetraedro.

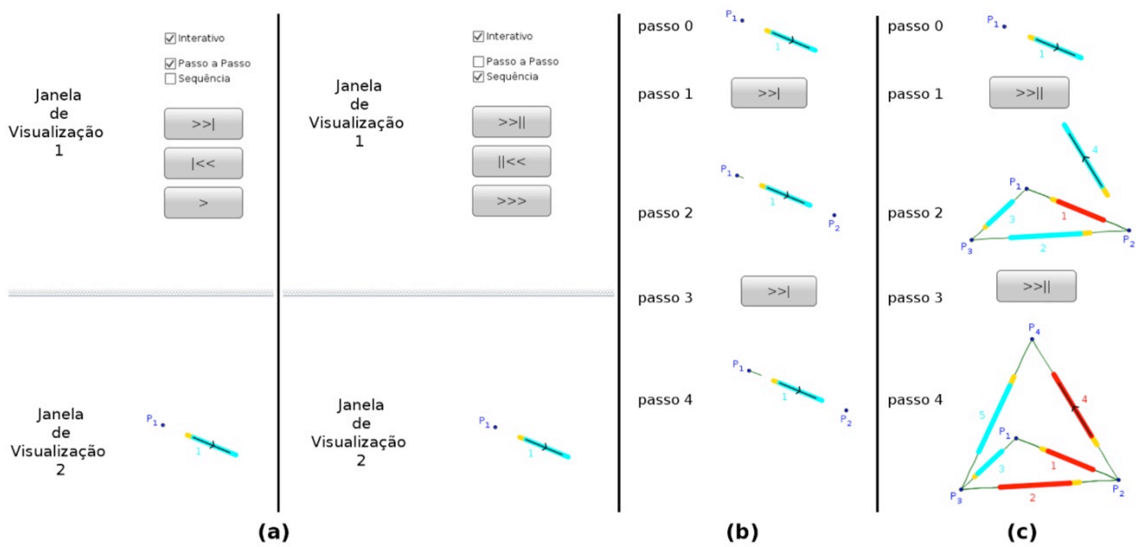


Figura 9 - Explorando a opção Interativo

Na Figura 9, o aluno pode acompanhar todo o processo de construção do modelo do sólido platônico na opção Interativo. Nessa opção, têm-se dois tipos de interação Passo a

Passo e Sequência. Dessa forma, na interação Passo a Passo (item a) tem-se o botão *Próximo* que avança com a linha, o botão *Anterior* que retrocede com a linha e o botão *Início* que vai para o começo da linha. Já na interação Sequência (item b) tem-se o botão *Próximo* que avança com a linha na próxima sequência, o botão *Anterior* que retrocede com a linha na sequência anterior e o botão *Completo* que exibe todo processo de construção de uma só vez. No exemplo da interação *Passo a Passo* (item c) a linha avança ao pressionar o botão *Próximo* duas vezes. No exemplo da interação *Sequência* (item d) a linha avança diversos passos de uma única vez ao pressionar o botão *Próximo*.

5. Considerações Finais

A construção dos esqueletos pode ser realizada nos anos escolares do Ensino Fundamental, desde que o aluno já tenha maturidade para lidar com os materiais específicos indicados para a construção dos modelos. Segundo Kaleff, isso se daria com cerca de 12 anos pois os procedimentos potencializam ao aluno visualizar a parte interna do modelo construído, enxergando por entre as arestas e proporcionando a possibilidade de perceber concretamente diversos elementos geométricos tais como: diagonais, alturas, seções planas, etc. (KALEFF, 2008, p. 119).

Porém, isso não quer dizer que, ao realizar a construção de um modelo concreto qualquer, o aluno apresentará a aprendizagem pretendida, pois o resultado é influenciado por uma grande variedade de fatores (internos e externos ao sujeito) que interferem na aprendizagem. Dessa forma, buscou-se complementar tais ações manipulativas com o material concreto, e espera-se que aplicação feita no software de geometria dinâmica, venha a completar as lacunas e a despertar no aluno a curiosidade e a vontade para aprender outros conteúdos matemáticos.

Pelo considerado, é fundamental para o professor estar atualizado em um mundo tecnológico e virtual visto que os recursos dos programas de geometria dinâmica são uma inovação no ensino de geometria, e, o ambiente colaborativo propiciado por eles, transforma as aulas em ambientes prazerosos e ilustrativos, uma vez que a exploração, a manipulação e a consequente visualização realmente favorecem uma aprendizagem significativa.

Cabe relembrar que, o procedimento de construção do modelo e a sua manipulação proporcionam ao aluno a chance de fazer conjecturas e questionamentos que ele provavelmente não faria se acontecesse em uma aula teórica tradicional. Assim, o aluno tem oportunidade de encontrar elementos conceituais diferentes e, consequentemente, enriquecer o conhecimento matemático. E com isso, pode ter uma melhoria na compreensão e ampliação da percepção do espaço e na construção de seus modelos mentais, para interpretar criticamente questões de Matemática e outras áreas do conhecimento.

6. Referências

ALMEIDA, C. R. M. *Sólidos de Platão e seus duais: Construção com material concreto e representações por GeoGebra*. 2015. 236f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática/Profmat) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 2015.

BAIRRAL, M. A. Desenvolvendo-se criticamente em matemática: a formação continuada em ambientes virtualizados. In: FIORENTINI, D; NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática: investigando e teorizando a partir da prática*. São Paulo: Musa Editora; Campinas, SP: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, 2005. p. 49-67.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. *Boletim da SBEM-SP*, São Paulo, Ano 4, n. 7, jul-ago de 1990.

KALEFF, A. M. M. R. *Vendo e Entendendo Poliedros*. 2a ed. Niterói: EdUFF, 2003. 210p.

KALEFF. A. M. M. R. LEGI: O Museu Interativo Itinerante de Educação Matemática do Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense. Número especial. *Boletim da SBEM*. Brasília: SBEM-BR. n.09. Fev. 2012. p. 02-09. Em http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim09.pdf. Acesso em 25 de fev. 2016.

KALEFF, A. M. M. R. . *Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à Historia da Geometria*. 1a Ed.. Rio de Janeiro: UFF/UAB/CEDERJ, 2008. 223p.

LORENZATO, S. *Por que não Ensinar Geometria?* A Educação Matemática em Revista, Ano III, n. 4, 1º semestre, Blumenau: SBEM, 1995.

PARK, J, J ET AL. Constructing 3D graph of function with GeoGebra(2D*). First Eurasia Meeting of GeoGebra*, Istanbul, Turkey, 2010.