

MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: INVESTIGAÇÃO A PARTIR DA RÉGUA TRIGONOMÉTRICA

Luana Oliveira Moreira de Jesus
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
luana_17morreira@hotmail.com

Lizandra Monteiro de Souza
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
lizandramonteiro@hotmail.com

Resumo:

Este trabalho relata a experiência do uso do material manipulável na regência do estágio supervisionado em uma escola estadual do município de Amargosa - BA, numa turma de 9º ano do Ensino Fundamental. O objetivo principal foi possibilitar aos alunos uma investigação a partir desse material, a fim de construir suas próprias conjecturas, e colocá-los ativamente no processo de ensino e aprendizagem, rompendo com o paradigma de que a matemática é pronta e acabada. Esse material trabalha com o ciclo trigonométrico – Simetria do 1º e 2º quadrante no estudo do seno e cosseno – através da investigação com a régua trigonométrica. Planejamos nossa regência em quatro momentos, com o intuito de despertar a participação dos alunos. Ao fim da intervenção podemos notar que a maneira como a turma interagiu mostrou a viabilidade de atividades em que o aluno participe mais autonomamente.

Palavras-chave: Trigonometria; Material Manipulável; Investigação;

1. Introdução

O uso de materiais manipulativos é defendido há algum tempo por pesquisadores e teóricos no campo da Educação, uma vez que visa tirar o aluno da passividade, podendo dá subsídios para eles participarem ativamente na construção dos seus conhecimentos, ao passo que o manipula, podendo fazer investigações e descobertas. Há diversas dificuldades no processo ensino-aprendizagem, dentre elas está justamente essa passividade do aluno, que é tido por muitos como um balde vazio pronto para ser enchido, ouvindo aulas apenas expositivas, na maioria dos casos com conteúdo que parece não ter sentido para o discente, o tendo como demasiadamente chato e/ou complicado sua compreensão.

O

material manipulativo é um instrumento importante que pode permitir melhoria nesse quadro, pois permite contribuir para a elaboração de conceitos, inclusive os conhecimentos matemáticos.

Esse tipo de material é um instrumento importante para motivar; inovar; auxiliar na construção do conhecimento; desenvolver o pensamento matemático; criar, confrontar e verificar hipóteses, desenvolver a criatividade, entre outras. Manipular os materiais consente aos alunos a criação de imagens mentais de conceitos abstratos.

Assim, a forma de abordagem com esse material requer atenção especial, o foco deve ser sobre as operações que com ele realiza. Caso contrário, se o aluno apenas o observar, poderá vê-lo apenas como mera ilustração e continuará numa posição passiva diante ao que lhe é ensinado.

É válido ressaltar que o material manipulável não substitui o papel do professor, apenas o auxilia no seu fazer pedagógico. O docente assume então um papel de mediador entre o aluno e o conhecimento, necessitando, todavia, ter um sólido conhecimento dos conceitos a serem abordados, do material usado e entender a matemática como ciência em construção (não como pronta e acabada). Com isso, criará condições para conduzir sua aula de forma proveitosa.

2. Ensino de trigonometria e o uso de materiais manipuláveis

A palavra trigonometria significa medidas das partes de um triângulo. A trigonometria surgiu da curiosidade do homem, na antiguidade remota, em medir distâncias inacessíveis, em problemas vinculadas a Astronomia, a Agrimensura e a Navegação. De acordo com Boyer (1996) existe, no Egito, um documento chamado de Ahmes, que data aproximadamente de 1650 a.C., que contém problemas que fazem referência ao *seked* (unidade para medir inclinação) de um ângulo, o que hoje conhecemos por cotangente de um ângulo. Por volta de 180–125 a.C., Hiparco de Nicéia, ampliou a ideia de Hipsícles, dividindo qualquer círculo em 360 partes. É atribuído a Hiparco a construção da primeira tabela trigonométrica, tal fato leva Hiparco a ser conhecido como “O Pai da Trigonometria”.

O ensino de

trigonometria é tido por muitos alunos como demasiadamente difícil. Pois os mesmos não conseguem compreender esse conteúdo. Até mesmo alguns professores temem em ensinar, preferindo deixá-lo em segundo plano.

Em meio a essas dificuldades, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (BRASIL, 2002) apresentam orientações a respeito do desenvolvimento das habilidades relacionadas ao ensino de trigonometria, destacando alguns pontos para serem trabalhados.

O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas (BRASIL, PCN+2012, p.121-122).

De acordo as orientações acima, a proposta visa trabalhar justamente com a primeira volta do ciclo trigonométrico (ou círculo trigonométrico, os termos serão empregados como sinônimos, assim como são apresentados em alguns livros e sites, mas para uma padronização do texto usaremos ciclo trigonométrico, evitando possíveis confusões). Em particular trabalhar atendo ao estudo do seno e cosseno.

Mota, Jucá e Pinheiro (2013) apontam algumas dificuldades na identificação de elementos dos triângulos e compreensão do significado das razões trigonométricas como o erro mais frequente em sua pesquisa. Esse fato pode ser observado também na turma em que a atividade a ser relatada foi desenvolvida, na mesma sala iniciou o estudo com as relações trigonométrica no triângulo retângulo. Com isso, observamos então a dificuldade dos alunos nesses mesmos pontos.

Concordamos com os autores quando eles continuam argumentando e defendendo que os professores deveriam planejar suas aulas fazendo uso de materiais manipuláveis problemas e desafios, uma vez que a repetições de procedimentos levam ao domínio pela memorização e não à aprendizagem. A metodologia adotada pela docente estava gerando justamente isso, sem muitas reflexões por parte da turma do o porquê daquilo.

Huanca (2006, p.243) destaca a necessidade de planejamento e comprometimento do professor, pois “É preciso que os professores estejam realmente comprometidos com o desenvolvimento contínuo do ensino. Sabemos que as ações dos professores podem encorajar ou desencorajar os estudantes quanto a pensar, questionar, discutir suas ideias,

resolver

problemas e buscar suas soluções”. Portanto o professor precisa repensar periodicamente sua prática, visando uma melhora no processo ensino aprendizagem da sua turma, permitir-se a modificar o que não está trazendo bons resultados, ou seja, ser um profissional voltado para a ação/reflexão/ação.

Optamos por trabalhar com material manipulável denominado régua trigonométrica (material esse não criado por nós), segue a imagem:

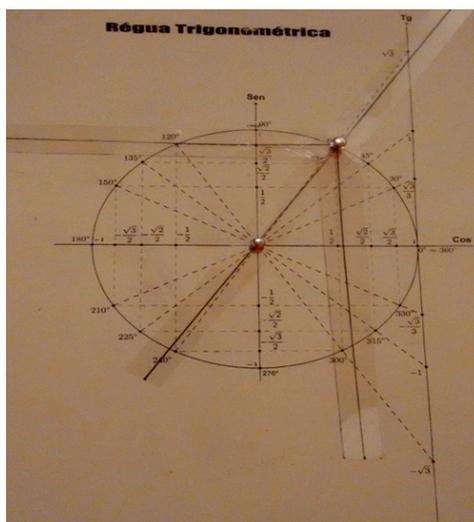


Imagem 1: Régua Trigonométrica

Fonte: Arquivo pessoal

Movimentando-a é possível encontrar o valor do seno cosseno e tangente de um determinado ângulo (0° à 360°). Propomos uma investigação a partir desse material, levando os alunos construir suas próprias conjecturas.

Acreditamos ser um instrumento importante para motivar; inovar; auxiliar na construção do conhecimento; desenvolver o pensamento matemático; criar, confrontar e verificar hipóteses, desenvolver a criatividade, entre outras. Manipular os materiais permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos.

3. Descrição da experiência

Relataremos aqui a nossa atuação de Estágio, que ocorreu no Colégio Estadual Santa Bernadete (CESB), localizado em Amargosa – BA, na turma da 9° ano B do turno vespertino do Ensino Fundamental. Após algumas observações dessa turma, percebemos que a professora trabalhava basicamente de forma tradicional, explicando o conteúdo no

definição e apresentação de exemplos e em seguida os alunos resolviam atividades no livro didático.

Eram alunos que interagiam entre si e com a professora em sua maioria. Apenas um aluno, que chamaremos de α , se mostrava bastante quieto. Ele sentava no fundo da sala, em um canto, mostrando um certo distanciamento dos demais. Não se envolvia com as aulas. Mesmo quando a professora passava atividades em dupla ou grupo, α fazia sozinho. Então a nossa proposta buscou justamente trabalhar, a partir da possibilidade de interação entre os alunos, almejando a participação na aula, de modo que eles se ajudem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Com isso, buscou-se alcançar também α , sendo este um grande desafio.

A ideia de trabalhar com o ciclo trigonométrico – simetria do 1° e 2° quadrante no estudo do seno e cosseno – surgiu pelo fato da professora ter começado o ensino de trigonometria. Assim, nossa proposta deveria prosseguir o conteúdo ministrado nas aulas anteriores. Buscamos trabalhar com a investigação a partir do material concreto, régua trigonométrica, buscar possibilitar que os alunos tivessem mais autonomia no processo ensino e aprendizagem.

Dentre o que objetivamos trabalhar, temos:

- Identificar os ângulos centrais;
- Associar esses ângulos com os respectivos senos e cossenos;
- Entender o ciclo trigonométrico através do material manipulável;
- Investigar a régua trigonométrica;
- Construir conjecturas;
- Simetria no estudo do seno e cosseno dos quadrantes 1 e 2 do ciclo trigonométrico.

A aula foi planejada basicamente em quatro momentos:

- Primeiro iniciariamos com uma explanação do que iria ser trabalhado;
- Em seguida, explicaríamos como manipular o material distribuído para toda a turma;
- Na sequência, os discentes deveriam investigar a partir desse material, almejando conjecturar algumas propriedades a parti da busca de padrões;
- Por fim, foi destinado um tempo para a conclusão da atividade.

A

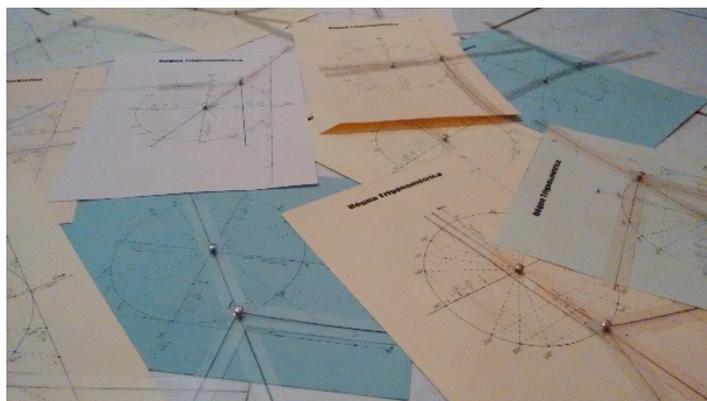
intervenção foi realizada na turma do 9º ano com 22 alunos, sendo 8 meninas e 14 meninos. A atividade proposta englobou diferentes pontos sobre trigonometria no ciclo. Para isso, iniciamos revisando alguns conceitos (ângulos, unidade de medidas dos mesmos (graus), circunferência, eixos cartesianos...), tidos como essenciais para o entendimento do conteúdo que almejamos trabalhar.

Apresentamos um ciclo trigonométrico construído em cartolina que pregamos no quadro. Perguntamos se os alunos já conheciam o ciclo trigonométrico. Como os PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio - reforçam, existe uma necessidade do professor considerar os conhecimentos prévios dos alunos, tanto o conhecimento formal como o informal:

O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico (BRASIL, 2000, p. 52).

Assim sendo, procuramos sondar o que os alunos traziam de conhecimentos a respeito do círculo. A resposta se deu de forma ainda tímida, disseram nunca terem visto o ciclo trigonométrico. Tentamos, então, levá-los a relacionar com a semelhança de um relógio convencional, o que acharam bastante interessante. Uma vez que aquela figura amedrontadora para a maioria, com tantos entes matemáticos reunidos, começou a parecer com algo tão familiar e simples. Apresentamos os elementos do ciclo, o seno e o cosseno de um ângulo.

No segundo momento, pedimos para que os alunos sentassem em duplas, distribuimos a régua trigonométrica entre eles. Segue a imagem dessas réguas:



2 – Régua trigonométrica
Fonte: Arquivo pessoal

Dando sequência, explicamos como manuseá-la, a partir de um modelo feito em cartolina, possibilitando uma melhor visualização e compreensão de todos.

Após todos conseguirem entender o funcionamento da régua, foi distribuída uma atividade para as duplas, iniciando assim o terceiro momento.



Imagem 3 – Aluno investigando a Régua Trigonométrica

Fonte: Arquivo pessoal

Nessa atividade buscou-se que os alunos investiguem a partir da régua trigonométrica, visando chegar a seguinte relação:

$$\text{sen}(180^\circ - x) = \text{sen}(x) \quad \text{cos}(180^\circ - x) = -\text{cos}(x)$$

Segue abaixo um quadro resumindo as questões que levaram a investigação sobre o seno e, posteriormente, sobre o cosseno. É interessante destacar que as atividades foram distribuídas gradativamente, só entregávamos a seguinte ao passo que a dupla finalizava a atividade anterior.

Imagem 4 – Tabelas das questões aplicadas na investigação

| <u>Atividade 1</u> | <u>Atividade 2</u> | <u>Atividade 3</u> | <u>Atividade 4</u> |
|---|---|---|--|
| a) Dê exemplo de um arco que possui seno igual a 1/2. | a) Dê exemplo de um arco que possui seno igual 60°. | Utilizando a Régua Trigonométrica resolva as equações: a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | De um modo geral, como resolveríamos equação $\text{sen } x = \text{sen } \beta$? |
| b) Existe | b) Existe outro | | |

| | | | |
|--|--|--|--|
| <p>outro arco que possui seno igual a $1/2$? Caso exista, qual o seu valor?</p> | <p>arco que possui seno igual de 60°? Caso exista, qual o seu valor?</p> | <p>b) $\text{sen } x = \text{sen } 70^\circ$ c) $\text{sen } x = \text{sen } 20^\circ$</p> | |
|--|--|--|--|

| <u>Atividade 5</u> | <u>Atividade 6</u> | <u>Atividade 7</u> | <u>Atividade 8</u> |
|---|---|--|--|
| <p>a) Dê exemplo de um arco que possui cosseno igual a $1/2$. b) Existe outro arco que possui cosseno igual a $1/2$? Caso exista, qual o seu valor?</p> | <p>a) Dê exemplo de um arco que possui cosseno oposto ao de 30°. b) Existe outro arco que possui cosseno oposto ao de 30°? Caso exista, qual o seu valor?</p> | <p>Utilizando a Régua Trigonométrica resolva as equações: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $\cos x = -\cos 80^\circ$ c) $\cos x = -\cos 50^\circ$ d) $\cos x = 0$ e) $\cos x = 1$</p> | <p>De um modo geral, como resolveríamos equação $\cos x = -\cos \beta$?</p> |

Buscamos auxiliar as duplas de forma a fazê-los refletir sobre o que era proposto. Houve algumas dúvidas quanto ao manuseio da régua, um erro recorrente foi o fato de confundirem o eixo que deveriam olhar para saber o valor do seno ou cosseno. Por exemplo ao procurar o seno de 60° eles respondiam que seria igual a $1/2$. Ao surgir esse empasse explicamos novamente na frente para toda a turma como manusear a régua trigonométrica, ressaltando esse ponto que estavam confundindo, isso reduziu esse equívoco. Uma dupla que ainda se confundia, sentamos próximos a eles tirando suas dúvidas individualmente.

Um outro obstáculo foi no momento de formalizar a relação já descoberta, uma vez que eles já estão habituados a receberem as fórmulas matemáticas prontas e acabadas, porém através das nossas mediações, conseguiram chegar as relações. Como a

próxima

atividade era entregue à dupla somente quando conseguiam responder a anterior, cada par seguiu um ritmo diferenciado. Assim, conseguimos atender as demandas quando eles nos solicitavam e conseguimos explicar individualmente como fazer essa formalização.

Como objetivávamos não perder o caráter investigatório, nossas intervenções nas duplas eram através de perguntas que fizessem esses alunos refletirem sobre o que fizeram. Inicialmente, procuramos saber se eles já tinham conseguido observar as relações, para isso questionamos com base nas respostas das perguntas anteriores:

- *O que vocês conseguiram constatar nas questões anteriores?*
- *Algum padrão se repete no seno? E no cosseno?*

Nesse momento, a maioria já tinha conseguido, através da atividade, observar as regularidades dos valores do seno e cosseno no ciclo trigonométrico. Os que ainda não estavam convictos, continuamos a lançar outras perguntas que conduzissem essa descoberta.

- *Dê um exemplo de arcos que possuem senos iguais.*
- *Pegando dois arcos com senos iguais, quanto falta do primeiro para chegarmos a um de 180° ? E do segundo quanto falta?*
- *Pegue dois outros arcos com senos iguais, quanto falta do primeiro para chegarmos um de 180° ? E do segundo quanto falta?*

Nesses momentos, os que ainda não tinham chegado a essa observação, já conseguiam visualizar esse fato. Interessante é que quando um da dupla conseguia descobrir a regularidade, ajudava o seu colega, conseguindo rapidamente fazer isso. Observe a fala de um deles:

- *Olha “vei”, quando a gente pega esse com esse e tem 180° , é porque os senos são iguais. Pega aí 150° com 30° , os senos são iguais. Entendeu?*
- *A rapaz, é mesmo.*

Agora para o cosseno repetíamos as mesmas perguntas, adequando para a observação da regularidade com o cosseno.

Para o último passo, da formalização, buscamos trazer aspectos já trabalhados por eles, como princípios da equação. Por exemplo, a questão da incógnita para representar um valor desconhecido, também o trabalho da igualdade:

- *Quando podemos afirmar que o seno é igual ao outro?*
- *Isso sempre repete para quaisquer dois valores somados que resultem em 180° ?*

Então como podemos representar esses dois valores?

Nesse momento, eles já entendiam que deveriam representar com duas incógnitas. Continuavam, então, os questionamentos:

- Se esses dois respectivos valores somados correspondem a 180° , então sabemos o seno é o quê? Represente como se fosse uma equação essa conjectura.

Conseguimos, então, fechar com êxito esse processo de generalização. Fizemos perguntas semelhantes para chegarmos a relação do cosseno. Esse movimento de perguntas distinguiu em cada dupla, uma vez que algumas tinham mais dificuldades que outras, então usávamos mais perguntas, outras com menos dificuldades empregávamos menos intervenções.

No quarto momento, pedimos para eles socializarem as suas respostas com os demais da turma. Finalizamos com algumas formalizações do que eles tinham respondidos e recapitulando o que tinham aprendido naquela aula.

Quanto a avaliação da turma, foi limitada a própria atividade realizada. Pedimos para que as duplas entregassem as respostas das atividades, assim nós recolhemos e trouxemos para casa, corrigimos não apenas colocando correto ou incorreto, mas buscamos ressaltar os pontos errados pondo ao lado o porquê estavam errados e como seria o correto, atribuindo em termos de porcentagem (0 a 100%) uma nota, depois devolvemos para a professora da turma, ela por sua vez concedeu uma nota aos alunos a partir das atividades já corrigidas e participação durante a execução da proposta, devolvendo em um outro momento essas atividades à classe.

Ao fim da intervenção podemos constatar que os objetivos foram alcançados. A maneira como a turma interagiu mostrou a viabilidade de atividades em que o aluno participe mais autonomamente, e onde eles possam se ajudarem. Isso foi ainda mais perceptível pelo fato de α em especial, muito quieto nas aulas que foram anteriormente observadas, nessa proposta ter conseguido acompanhar todo o processo, participando e socializando as suas ideias com a sua dupla e demais colegas, o que nos trouxe uma grande motivação para continuarmos investindo na nossa formação e em atividades de cunho inovador (por tratar de uma proposta diferente do que habitualmente eles trabalhavam), tendo em vista que levamos o material concreto e apostamos na investigação como recursos didáticos favorecedores no ensino e aprendiagem, visando

justamente

atender com qualidade uma maior demandas dos nosso alunos, obsevando suas demandas individuais.

Assim, realizamos uma metodologia de ensino diferente da empregada pela professora regente, que usava apenas o quadro e o livro didático para ensinar os conteúdos, objetivando o treino dos procedimentos de como resolver algo.

4. Considerações Finais

A realização dessa experiência com alunos do 9º ano do CESB proporcionou aos mesmos uma oportunidade de trabalhar com atividade dinâmica e, também, demonstrou ser uma maneira diferenciada para o professor desenvolver os conteúdos matemáticos em sala de aula. O material manipulável e a investigação requerem empenho tanto do aluno quanto do professor, porém nem sempre o docente está disposto ou preparado a dedicar-se em uma atividade como essa. É importante, todavia enaltecer que os resultados por esse esforço podem ser compensadores para ambas as partes.

Ao usarmos os materiais manipuláveis e jogos em sala de aula, não estamos apenas possibilitando uma melhor aprendizagem de dados conteúdos matemáticos, mas também um aprimoramento das práticas sociais, as vezes até mais importantes naquele momento do que certos conceitos pré-imposto. Dentre essas práticas pode ser destacada a colaboração do aluno com os seus colegas, a interação, o respeito ao próximo, convívio com ganhos e perdas, entre outras.

5. Referências

BOYER, C. **História da matemática**. Edição 2a - Trad. De Elza Gomide, Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo,1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCNEM**. 2000. Disponível em:
<portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf> Acesso em: 21 Abr. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. **PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF. 2002. Disponível em
<<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.

HUANCA,

R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem avaliação de Matemática na e além da sala de aula.** 2006, 253 fl. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista.

MOTA, T. B.; JUCÁ, R. S.; PINHEIRO, C.A.M. Uma análise de erros nas relações trigonométricas no triângulo retângulo. In: **XI Encontro Nacional De Educação Matemática.** PUCPR. Curitiba, 18 a 31 jul. 2013.