

## UTILIZANDO PROBLEMAS DE FERMI PARA ESTIMAR

*Heloisa Almeida de Figueiredo*  
*Universidade Federal Fluminense*  
*heloisa-figueiredo@hotmail.com*

*Flávia dos Santos Soares*  
*Universidade Federal Fluminense*  
*flasoares.rlk@gmail.com*

### **Resumo:**

O presente artigo tem como objetivo apresentar atividades referentes ao ensino de estimativas, por meio de alguns problemas de Fermi. Os problemas assim denominados são problemas que envolvem algum processo de estimativa para chegar à resposta. A razão do nome deve-se a Enrico Fermi, físico italiano destacado pela maneira de elaborar e responder questões envolvendo estimativas e ficou famoso por suas estimativas da ordem de grandeza, ou estimativas rápidas, com aparentemente poucos dados. O principal intuito de abordar este conteúdo neste artigo é mostrar para o aluno que tão melhor será sua estimativa, quanto mais ricas forem suas considerações de variáveis e dados utilizados para o processo em questão.

**Palavras-chave:** ensino de matemática; estimativas; Problemas de Fermi.

### **1. Introdução**

A estimativa é um processo mental no qual intuição e lógica se encontram. E, embora a abordagem do assunto estimativas, no ensino fundamental, esteja geralmente vinculada ao campo do tratamento da informação, este tema é complexo e está intimamente ligado ao raciocínio matemático e aos diversos campos da matemática escolar.

Muitas vezes precisamos de uma resposta exata para um problema, no entanto, na maioria das vezes, um número aproximado também serve, uma vez que as estimativas são, usualmente, mais fáceis e rápidas de obter, por isso devemos usá-las. Foi pensando desta maneira que o físico Enrico Fermi (1901-1954) estimou grosseiramente os dados de uma pioneira experiência, do que viria ser a bomba atômica. Fermi tinha um talento especial para fazer estimativas mais ou menos precisas - com muito poucos dados, e, portanto, esse modelo de estimativa é conhecido hoje como uma estimativa Fermi. Muitas vezes, obter uma estimativa é o suficiente para tomar uma decisão. Então, com as estimativas Fermi você pode economizar muito tempo, especialmente porque você ganha mais prática em fazê-las.

A estimativa também é um tema discutido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). O texto trata o cálculo de estimativas como essencial, pois é fora da escola que os alunos têm contato com situações práticas no uso da matemática, não sendo necessário que a resposta seja exata, bastando uma aproximação. Sendo assim, o processo de estimar apoia-se em aspectos conceituais referentes aos números e as operações como, por exemplo, ordem de grandeza, proporcionalidade e equivalência; em procedimentos como decompor, substituir, arredondar, compensar e na aplicação de estratégias de cálculo mental.

Apesar da ênfase que os PCNs dão as estimativas, lidamos pouco com elas como um conteúdo a ser ensinado e temos pouca prática em fazer estimativas mais complicadas. Este trabalho tem como objetivo discutir um pouco mais sobre as estimativas no contexto escolar e oferecer uma sugestão de atividade a partir dos problemas de Fermi para serem propostos em sala de aula e estimular os professores a criarem os seus próprios “problemas de Fermi” com os alunos.

## 2. As estimativas no contexto escolar

As estimativas estão presentes em cálculos de nosso cotidiano em contextos diversos, já que nem sempre precisamos de uma resposta exata para um problema. Em pesquisas diversas, as estimativas são apontadas como importantes em sala de aula para que o aluno possa perceber que a Matemática não é feita somente por resultados “exatos”, mas também de elaboração de argumentos, aproximações, raciocínios e justificativas (FONTANIVE, KLEIN, RODRIGUES, 2012).

Em linguagem coloquial a palavra “estimativa” possui diversos significados, tal como: “julgamento de um objeto, dependendo das circunstâncias individuais dos quais a emite”. (DE BRESSAN& LE BOGISIC, 1996). Isolado, o termo estimar se refere a um número que é uma aproximação adequada para um número exato, dado o contexto particular. Esse conceito de estimativa é aplicado não apenas ao cálculo, mas também as medidas e quantidades (VAN DE WALLE, 2009).

Espallargas (2005) menciona alguns fatores ligados diretamente à necessidade de realizar estimativas em nosso cotidiano, sendo um deles a pressa. Em outros casos, a resposta não é tão urgente, mas há ocasiões em que realizar uma avaliação exata supõe um gasto de

tempo que não temos ou não podemos realizar, o que ocorre, por exemplo, quando se quer saber o espaço livre em um armário. É claro que se pode esvaziar o armário, medi-lo com a fita métrica para encontrar seu volume, assim como dos variados objetos que ele contém, mas se trata de uma tarefa considerada trabalhosa demais para ser realizada e, nesses casos, impõe-se a estimativa, ilustra o autor.

Outro ponto citado por Espallargas (2005) presente em muitas situações e que pressupõe a necessidade de realizar estimativas é a inacessibilidade física. Essa inacessibilidade pode ser espacial, como determinar a altura máxima alcançada por um avião ou um foguete, ou temporal, quando tentamos lembrar o número de participantes de um evento realizado há 5 anos. Relacionada a essa característica, o autor menciona também uma inacessibilidade matemática, que pode estar relacionada a presença de valores numéricos muito elevados ou a formas geométricas irregulares. Podemos perceber isso quando queremos contar o número de fios de cabelo de um adulto ou o número de grãos de areia da praia, como quis Arquimedes.

Em orientações curriculares de diversos países as estimativas são indicadas, inclusive no Brasil. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) ressalta-se que além da competência de realizar cálculos com lápis e papel, outras modalidades, como o cálculo mental, as estimativas e o cálculo produzido pelas calculadoras são conhecimentos úteis para a vida de todos.

A estimativa constrói-se juntamente com o sentido numérico e com o significado das operações e muito auxilia no desenvolvimento da capacidade de tomar decisões. O trabalho com estimativas supõe a sistematização de estratégias. Seu desenvolvimento e aperfeiçoamento depende de um trabalho contínuo de aplicações, construções, interpretações, análises, justificativas e verificações a partir de resultados exatos. Desde as primeiras experiências com quantidades e medidas, as estimativas devem estar presentes em diversas estratégias que levem os alunos a perceber o significado de um valor aproximado, decidir quando e conveniente usá-lo e que aproximação e pertinente a uma determinada situação, como, identificar unidades de medida adequadas as grandezas (BRASIL, 1997, p. 77).

Dentre as situações que mais usamos estimativas, Van De Valle (2009) cita as estimativas de medidas e de quantidades, mas destaca a que denomina *estimativa computacional* ou *cálculo estimado*, ou seja, quando há necessidade de “determinar um

número que seja uma aproximação de um cálculo que nós não podemos ou não desejamos determinar exatamente” (p.274).

Segovia & Martínez (1995) apontam que o conceito geral de cálculo estimado possui características implícitas, tais como:

1. Consiste em valorar uma quantidade ou resultado de uma operação aritmética;
2. O sujeito que faz com que a valoração tem alguma informação, referência ou experiência sobre a situação em que deve processar;
3. A valoração é feita geralmente de forma mental;
4. Se faz com rapidez e usando números o mais simples possíveis;
5. O valor atribuído não é exato, mas adequado para tomar decisões;
6. O valor atribuído admite distintas aproximações, dependendo de quem fez a valoração (p.502).

Apesar de todas essas características que envolvem o uso e a necessidade das estimativas, Van de Walle (2009) salienta que estimar não é “chutar”.

Muitas crianças confundem a ideia de estimar com “chutar”. Nenhum dos três tipos de estimativa envolve um chute impensado. A estimativa computacional envolve algum cálculo, não é uma simples suposição (p.274).

O esquema proposto por Bressan & Bogisic (1996) ilustra a estimativa e suas relações com o problema que se quer resolver, o tipo de resposta que se deseja e os procedimentos de cálculo que podem ser usados em cada situação.

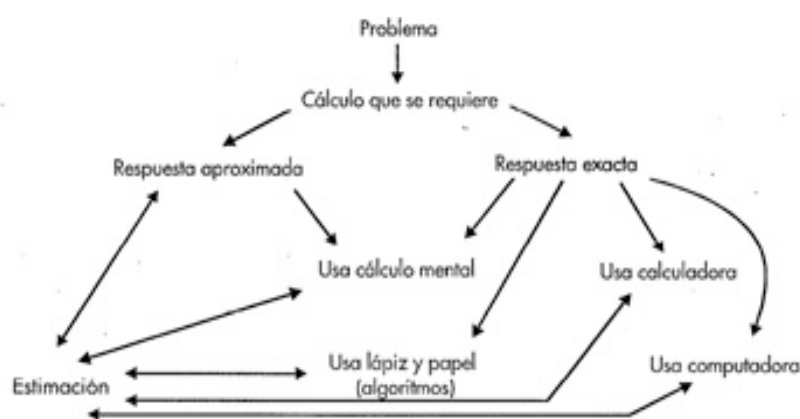


Figura 1 – Esquema para cálculos numéricos (BRESSAN & BOGISIC, 1996, p.7)

A partir desse esquema, Bressan & Bogisic (1996) destacam as estimativas como uma forma de cálculo privilegiada, não só nas situações em que uma resposta aproximada é

suficiente como naquelas que requerem um cálculo exato, elas ajudam a antecipar resultados, orientar os cálculos e controlar a razoabilidade das respostas obtidas.

A relação entre o cálculo mental e o cálculo estimado também é destacada no esquema. As estimativas são feitas usando cálculos mentais com números que são mais fáceis de trabalhar do que os números reais envolvidos. O cálculo mental é ferramenta importante no processo de estimar o resultado de uma operação ou uma medida. Deste modo, a estimativa depende de habilidades de cálculo mental dos estudantes. (VAN DE WALLE, 2009).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, o ensino de estimativas é também tratado como aproximações e aparece inserido na parte que trata da “ampliação dos procedimentos de cálculo”. O assunto é introduzido e justificado pela necessidade de estimar cálculos mentais, pois, para total compreensão do cálculo escrito, é indispensável o auxílio do cálculo mental, das estimativas e das aproximações. Percebe-se quão grande é o elo entre o cálculo mental e a estimativa, visto que em razão dos números de vários dígitos, as estratégias de cálculo mental são limitadas. Como por exemplo, no caso de uma pessoa estar pesquisando preços de televisão em uma loja de eletrodomésticos, e a parcela do modelo escolhido custa R\$899,90. O excessivo número de algarismos complica o cálculo mental, mas quando o valor é aproximado para R\$900,00 a conta já flui com mais facilidade.

Os PCNs recomendam que o aluno perceba esta necessidade:

é recomendável que a organização do estudo do cálculo privilegie um trabalho que explore concomitantemente procedimentos de cálculo mental e cálculo escrito, exato e aproximado, de tal forma que o aluno possa perceber gradativamente as relações existentes entre eles e com isso aperfeiçoar seus procedimentos pessoais, para torná-los cada vez mais práticos, aproximando-os aos das técnicas usuais. (BRASIL, 1998, p. 75).

Cabe observar que as estimativas estão presentes na escola não como um tópico do currículo a ser ensinado, mas uma habilidade importante a ser desenvolvida em sala de aula. Para Reys (1995), é essencial que estratégias para estimar sejam trabalhadas com os alunos, pois, a menos que estratégias específicas sejam ensinadas, poucos estudantes terão condições de desenvolvê-las por si próprios. Segundo o autor, ao aumentar seu repertório de estratégias

de estimativas por meio da educação e da prática, os alunos se tornam cada vez mais conscientes das opções disponíveis.

É importante assim que os alunos aprendam estratégias para estimar usadas em resolução de problemas e em tomada de decisões, dentro e fora da matemática, dentro e fora da escola. Estas estratégias permitem antecipar e avaliar a consistência dos resultados de medição e de cálculos e ainda permitem ao aluno entender a imprecisão da medição começando a trabalhar o conceito de erro (DE BRESSAN & LE BOGICIC, 1996).

### 3. Problemas de Fermi para uso em sala de aula

Nesta seção serão apresentadas algumas atividades que usam a noção de estimativa para serem resolvidas e que envolvem “números grandes”. Estas atividades estão dispostas no livro “Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin”, de 2008. Em tradução livre, “Estimativa: Resolvendo os problemas do mundo nas costas de um guardanapo” de Lawrence Weinstein & John A. Adam. O livro é muito interessante, pois trata a estimativa como parte essencial da matemática, apresentando ao leitor maneiras de resolver problemas aparentemente complexos usando apenas dados já conhecidos e com operações simples.

Visto a ausência de tradução do livro para português, os problemas muitas vezes usam dados do sistema americano de medidas, tais como pés e milhas. Além disso, as atividades trazem também localizações do país de origem do escritor. Para estes obstáculos foi feita uma adaptação para que a sugestão de resolução esteja ao alcance de professores e alunos brasileiros. Levando em conta todos estes aspectos, as atividades propostas bem como as sugestões de resolução são baseadas no texto original.

Para a resolução das respectivas atividades é necessário que os alunos estejam familiarizados com alguns conteúdos matemáticos, em particular, números em notação científica, noções de cálculo mental e de estimativas, noções básicas de volume e área. Ratifica-se a ideia de que, estas são apenas sugestões de resolução e de cada aluno precisa ser estimulado a fazer suas próprias estimativas, usando dados que considera importante, pois é apenas quando o professor dá autonomia para o estudante que ele assimila a importância do

conteúdo. Há, no começo de cada atividade, dicas de como resolvê-las indicadas pelos autores e que funcionam apenas como alicerce para melhor compreensão do texto.

Como bem observa Navarro (2013), não há um procedimento bem definido para resolver esse tipo de problema. Se conhecêssemos todas as informações necessárias para a resolução seria fácil calcular com algumas operações aritméticas. Frente a isso, o autor fornece algumas sugestões. A primeira é tentar decompor o problema principal em outros secundários e mais fáceis de resolver. Outra dica do autor é usar nossa experiência. Por exemplo, é razoável supor que expectativa de vida de uma pessoa varia entre 75 e 80 anos, ou ainda que cabem três ou quatro pessoas em um metro quadrado ou ainda que dormimos cerca de 8 horas por dia. Se a quantidade a estimar vai além de nossa experiência, Navarro (2013) sugere que usemos um limite inferior e um limite superior que pareçam razoáveis e calcular a média geométrica. Arredondar os números também é sugerido já que o objetivo não é obter uma resposta exata. O autor não descarta também a possibilidade de buscar outras informações desconhecidas em livros ou na *web*.

Vamos agora discutir dois problemas presentes em Weinstein & Adam (2008).

*Problema 1: Em média, quantas pessoas estão voando sobre o Brasil em um momento qualquer?*

Para resolver esse problema os autores oferecem algumas dicas. A primeira é não supor um horário de madrugada. Já que estamos lidando com estimativas é mais justo pensar em um horário durante o dia. Outra observação é pensar que fração de tempo se gasta voando. Ou seja, o número de horas ou dias que você voa por ano em comparação com o número de horas ou dias em um ano. A fração de tempo que as pessoas gastam voando é igual a fração de pessoas voando a qualquer momento.

Há duas ideias básicas aqui. Primeiro, o tempo em que a média das pessoas passa voando é igual a média de pessoas que estão no ar em um instante qualquer. Isto significa que se você gastar 10% do seu tempo voando então, em média 10% da população está no ar em um dado momento. Segundo, podemos usar nossa experiência para estimar o tempo que a média das pessoas passa no ar, ou no shopping, ou dormindo.

Em outras palavras:



$$\frac{\text{número de pessoas voando agora}}{\text{população brasileira}} = \frac{\text{tempo gasto voando}}{\text{1 ano}}$$

A população brasileira é aproximadamente 200 milhões de habitantes. Podemos estimar que a média de voos por brasileiro é de três por ano. Já um voo típico está entre uma e seis horas de duração. Vamos considerar então dois voos por ano com três horas por voo, logo, serão seis horas por ano em voo. Agora nós inserimos os dados que estimamos arredondando alguns valores para facilitar os cálculos:

$$\frac{\text{número de pessoas voando agora}}{2 \cdot 10^8} = \frac{6}{400 \cdot 25 \text{ horas/dia}}$$

Ou seja, número de pessoas voando agora =  $3 \cdot 10^8 \cdot \frac{6}{10^4 \text{ horas/dia}}$ . Arredondando  $3 \times 6$  para 20 e simplificando chegamos em  $2 \cdot 10^5$  pessoas por hora. Isto significa que existem aproximadamente duzentas mil pessoas voando sobre o Brasil neste momento.

*Problema 2: Quantos quilômetros um jogador de futebol percorre durante um jogo?*

Mais uma vez Weinstein & Adam (2008) lembram de algumas informações úteis que podemos passar para os alunos. Quantas vezes os jogadores correm de um lado para o outro no campo de futebol? Ou ainda, o quão rápido eles correm? E quanto tempo do jogo eles gastam correndo? Podemos estabelecer que a distância percorrida é igual a velocidade média multiplicada pelo tempo em que o jogador está em movimento.

Todos nós já assistimos a algum jogo de futebol e percebemos que os jogadores (exceto o goleiro) estão o tempo do jogo andando ou correndo e raramente ficam parados. Eles às vezes caminham e por vezes, correm muito rápido. Vamos começar estimando velocidades de caminhada e de corrida. Em 2009, Usain Bolt percorreu os 100 metros em 9.58s, que podemos aproximar para 10s. Ou seja, a velocidade da corrida é cerca de 10m/s. A velocidade de caminhada está próxima de 2 m/s. Se nós assumimos que metade do tempo é gasto correndo a toda velocidade e a outra metade é gasto caminhando, então teremos uma velocidade média de  $\frac{10+2}{2} = 6\text{m/s}$ . Um jogo dura 90 minutos. Como 90 minutos correspondem a 5400 segundos, 90 minutos em uma velocidade média de 6m/s dá em torno de 32 km.



A partir da resolução deste e de outros problemas resolvemos então criar os nossos próprios problemas de Fermi. Tentamos então fazer uma estimativa para a seguinte questão: *Quantos carros passam pela Ponte Rio Niterói por dia?*

Sabemos que a travessia Rio-Niterói é realizada diariamente por muitos moradores do Rio de Janeiro que trabalham em Niterói ou cidades circunvizinhas, como São Gonçalo, por exemplo, e também no sentido inverso, por moradores de Niterói e demais cidades que trabalham no Rio. Para resolver o problema precisamos de alguns dados iniciais. Ter um mapa das regiões do estado também ajuda.

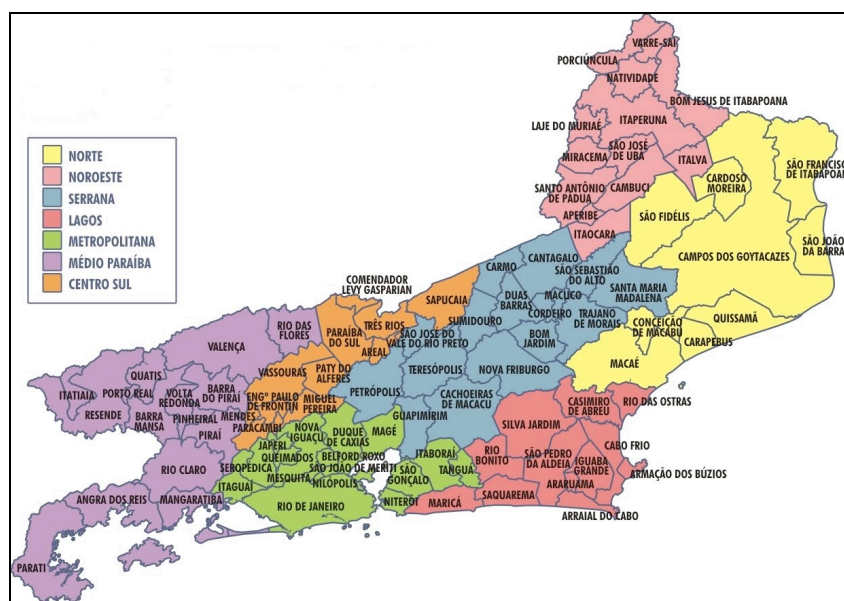


Figura 1 – Mapa do estado do Rio de Janeiro

A população da cidade do Rio de Janeiro é de aproximadamente 6 milhões de habitantes. Vamos fazer uma estimativa para a fração das pessoas que trabalham ou estudam do outro lado da ponte e vão de um lado para o outro. Devemos lembrar que para ir do Rio de Janeiro a Petrópolis, na região serrana do Rio de Janeiro ou para Vassouras, no Centro Sul fluminense não há necessidade de passar pela Ponte. Assim, pelo que conhecemos da geografia e da malha viária do estado, é razoável supor que quem faz essa travessia é quem mora especialmente nas cidades do Rio de Janeiro e região metropolitana (o que inclui Niterói) e também em parte da Região dos Lagos. A população da cidade do Rio de Janeiro é de 6 milhões de pessoas e a cidade de Niterói e região dos Lagos juntam mais uns 2 milhões de habitantes, perfazendo um total de 8 milhões.

Boa parte das pessoas usa o transporte público como o ônibus ou a barca para esse deslocamento. Se considerarmos que 10% das pessoas fazem a travessia pela ponte com carro de passeio temos, 10% de 8 milhões é igual a 800 mil. No Brasil, temos 1 carro para cada 4 habitantes. Assim, 800 mil dividido por 4, chegamos a 200 mil. Se apertarmos um pouco mais a estimativa do número de pessoas que fazem a travessia para 5%, encontramos 100 mil pessoas por dia. Fazendo uma média aritmética entre esses dois valores encontramos 150 mil pessoas por dia, o que é um valor bastante aproximado do valor real.

#### 4. Considerações Finais

Ainda há um imaginário de que estimar é chutar ou fazer aproximações grosseiras, por isso, é preciso que cada vez mais alunos e professores compreendam que fazer estimativas é tão importante quanto achar um número exato, trazendo ao aluno diversos benefícios.

Podemos notar com os exemplos dados neste texto que para fazer uma estimativa usamos várias outras estimativas parciais. Sendo assim, o resultado final vai depender de quão boas estão essas estimativas finais e quanto melhores elas forem mais aproximado do valor real a estimativa será. Como já mencionado é possível e saudável estimular os alunos e fazer pesquisas na internet para obter essas informações secundárias. Dessa forma, não há estimativa “correta” ou “errada”. Além disso, ela pode variar bastante dependendo do tipo de informação que se leva em consideração em cada problema.

O trabalho com estimativas pode abrir uma janela de possibilidades de trabalho para o professor. Além do trabalho com o tratamento e coleta de dados os alunos trabalham com o cálculo aproximado fazendo arredondamentos, com a notação científica, medidas e outros tópicos do currículo. Assim como nós, o professor pode criar com a turma os seus próprios “problemas de Fermi” e tornar a resolução desses problemas parte de um projeto que envolva a turma toda. Isso estimula a criatividade e o senso crítico ao “chutar” valores para informações parciais que são necessárias para obter a solução do problema. Pode-se começar com problemas simples e depois propor outros mais complexos.

Esperamos com este trabalho que professores e alunos encontrem estímulo para elaborar novas estimativas e encontrar meios de resolução das mesmas, lembrando que estimar sempre é fazer um desafio em aberto.

## 5. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRESSAN, Ana María Porta de; BOGISIC, Beatríz Costa de. *La estimación, una forma importante de pensar en matemática*. Desarrollo Curricular n.1, EGB 1 y 2, Matemática. Consejo Provincial de Educación, Provincia de Río Negro, 1996.

ESPALLARGAS, José María Núñez. Sobre la *estimación* en la enseñanza de las matemáticas y la cubicación de maderas como situación didáctica. *Números*, v.62, oct. 2005, p. 65-80.

FONTANIVE, N. S.; KLEIN, R.; RODRIGUES, S. S. Boas Práticas Docentes no Ensino da Matemática. *Estudos & Pesquisas Educacionais*, n. 3, 2012, p. 195-277.

NAVARRO, Juan Manuel García. Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Épsilon*, v. 30 (2), n. 84, 2013, p. 57-68.

REYS, Robert E. Estimación. In: *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria*. Lecturas. SEP: México, D.F. 1995, p. 35-46.

SEGOVIA, Isidoro; MARTÍNEZ, Enrique Castro. La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic journal of research in educational psychology*, v.7, n.17, 2009, p. 499-536.

VAN DE WALLE, John A. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WEINSTEIN, Lawrence & ADAM, John A. *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton, 2008.