

## TRANSFORMAÇÕES EM GRÁFICOS DE FUNÇÕES COM GEOMETRIA DINÂMICA

*Agnaldo da Conceição Esquincalha*  
*Universidade do Estado do Rio de Janeiro*  
*aesquincalha@gmail.com*

*Andrea Zander Vaiano*  
*Universidade do Estado do Rio de Janeiro*  
*andrezanderv@gmail.com*

*Priscilla Machado da Rocha de Castro*  
*Universidade do Estado do Rio de Janeiro*  
*priscillacastro1@outlook.com*

### **Resumo:**

O presente trabalho apresenta os resultados da implementação de duas sequências didáticas realizada com licenciandos em Matemática, tendo o intuito de investigar uma possibilidade para o estudo das transformações em gráficos de funções reais de uma variável real. A abordagem foi realizada em dois momentos: em sala de aula regular, auxiliada por *slides*, e no laboratório de informática, com apoio de um *software*. Os resultados mostram que a possibilidade do uso de um ambiente de Geometria Dinâmica como um lugar investigativo fomentou nos licenciandos uma maior capacidade em generalizar e compreender a influência que a variação dos parâmetros de funções desempenha nas transformações de seus gráficos.

**Palavras-chave:** Gráfico de Função; Transformações; Geometria Dinâmica.

### **1. Introdução**

O conceito de função é considerado um dos mais importantes em Matemática, sendo utilizado também em outras áreas do conhecimento. Em virtude das constantes modificações que ocorrem no mundo físico, a linguagem gráfica tem um papel relevante na compreensão do comportamento, planejamento e controle de fenômenos. Não é raro nos depararmos com as funções e seus gráficos no cotidiano, mesmo que não tenhamos consciência disso. A forma mais natural de um aluno do Ensino Médio articular a expressão algébrica com a representação gráfica de uma função básica é por meio de tabelas, porém ao se mudar um coeficiente ou acrescentar uma constante, é fundamental a percepção que este deve ter em relacionar o gráfico resultante com o gráfico da função básica original. Ao observar as propriedades inerentes às funções, poderá fazer generalizações para os mais diversos tipos de gráficos.

Dessa forma, a ênfase deste trabalho está no tratamento gráfico das funções, dando a possibilidade de compreender sua manipulação a partir de gráficos de funções básicas conhecidas, ao utilizar transformações, permitindo ao aluno ampliar seus conhecimentos a um olhar mais confiante sobre um estudo mais detalhado que a função possa exigir.

Levando em conta as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), a atividade matemática escolar não deve “olhar para as coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno” (p. 56). Para isso, o professor tem o papel fundamental de conduzir as atividades de modo a enriquecer o raciocínio do aluno, levando-o à organização e generalização das ideias.

Tendo em vista que o estudo de funções pode se tornar pouco atrativo em uma aula tradicional centralizada no professor, a integração com a tecnologia poderia ser uma boa opção, já que esta é cada vez mais constante na vida dos alunos, que podem ser sujeitos ativos no processo ensino-aprendizagem. Para tal, existem diversos *softwares* gratuitos, inclusive para telefones celulares, que possibilitam a construção de gráficos com simplicidade e uma melhor visualização das transformações em gráficos de funções. Além disso, segundo Ponte (1990) a tecnologia pode ser de grande valia no processo de aprendizagem, no sentido que,

pode ser usada para realizar as manipulações ou determinar as soluções dentro dos modelos matemáticos, simplificando a parte rotineira do trabalho e proporcionando uma maior concentração naquilo que verdadeiramente é importante - a compreensão do significado dos conceitos, a elaboração e implementação de estratégias para a resolução dos problemas, e sua análise crítica e discussão (p. 9).

Deseja-se com este trabalho, apresentar uma opção metodológica para o estudo de algumas transformações, de forma a facilitar o seu entendimento em sala de aula, aliada ao uso de tecnologias digitais. Nosso intuito, então, é sugerir uma abordagem diferenciada deste tema tão importante, e relatar uma oficina realizada em dois momentos, com 20 licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. No primeiro momento, em sala de aula e, no segundo, no laboratório de informática.

## 2. Uso educacional de tecnologias para o estudo de funções

Vários autores têm se dedicado ao estudo de diferentes possibilidades das tecnologias de informação e comunicação como instrumentos de mediação pedagógica entre o saber, o professor e os estudantes. Masseto (2009) e Kenski (2007) pontuam que as Tecnologias Digitais

de Informação e Comunicação têm sido utilizadas nos meios educacionais com bastante eficácia, possibilitando que surjam novas práticas pedagógicas.

A partir disso, entende-se que incorporação destas tecnologias na escola e no fazer docente é de grande importância e pode ter impactos positivos no ensino e no aprendizado. Além disso, como pontuam Esquincalha e Pinto (2013, p.2), é preciso que “os professores estejam preparados para a sua utilização e dispostos a transformar algumas de suas práticas pedagógicas, a fim de acompanhar as mudanças culturais que a sociedade tem vivenciado”.

Já existem muitas pesquisas mostrando a relevância do estudo dinâmico de funções reais com o uso de *softwares*, dentre as quais, destacamos as de Rezende, Pesco e Bortolossi (2012), e Gafanhoto (2010). De um modo geral, as pesquisas na área exploram o conceito de função a partir da variabilidade entre duas grandezas, taxas de variação média e instantânea, além de características variacionais da função (crescimento, concavidade e extremos) que mudam de acordo com a variação dos parâmetros da função, o que é facilmente controlável a partir de um *software* de Geometria Dinâmica.

Bellemain (2001, p. 1314) afirma que a Geometria Dinâmica (GD) “permite considerar e conceber uma representação de objetos matemáticos abstratos em várias configurações, podendo modificar suas posições relativas”. Desta forma, destacam-se algumas vantagens de um programa que trabalha com GD:

- verificar o provérbio de Confúcio: “o aluno ouve e esquece, vê e se lembra, mas só compreende quando faz”;
- as propriedades da figura após sua construção se mantêm inalteradas. Este detalhe possibilita que o aluno perceba a diferença entre os elementos que se alteram e os que não sofrem alterações. Isto é um facilitador para a compreensão das propriedades da figura;
- é um campo de testes para os alunos. A classe pode operar investigações sobre a construção, testar teoremas e fazer conjecturas sobre seus elementos e suas propriedades. O docente pode utilizar-se desses recursos para introduzir o processo de argumentação e dedução;
- é possível manter o histórico dos procedimentos efetuados naquela construção, disponível para ser consultado por outros alunos e professores. (ESQUINCALHA, ROBAINA, RODRIGUES, 2010, p. 5)

Rezende, Pesco e Bortolossi (2012) trazem um interessante estudo da variação das funções afim, quadrática e exponencial por meio de seus gráficos, com o uso do GeoGebra, além de apresentarem um jogo “Como  $b$  depende de  $a$ ?”, em que os pontos  $a$  e  $b$  são dispostos sobre uma mesma reta numérica e o aluno pode movimentar livremente o ponto  $a$ , e verificar o

movimento automático do ponto  $b$ . A partir dessa relação estabelecida, o aluno deve identificar a lei da função que rege aquele comportamento.

Gafanhoto (2010) traz um estudo sobre a integração de diferentes tipos de representação das funções no contexto de utilização de um ambiente de Geometria Dinâmica, destacando que a maior parte dos alunos, sujeitos de sua pesquisa, recorriam tanto ao tratamento gráfico quanto ao algébrico, mesmo com a possibilidade de um estudo qualitativo das funções por meio de seus gráficos plotados num *software*. Isso, provavelmente, é resultado de uma aparente escolha dos professores ao tratamento algébrico em detrimento do gráfico quando da apresentação dos tipos de funções. Da mesma forma, não raro, uma parte significativa dos alunos se prendia a elaboração de tabelas de pontos para a construção dos gráficos das funções, o que pode gastar muito tempo e não dar uma boa visão qualitativa do comportamento da função no seu domínio.

Cunha e Moraes (2008) foi um dos poucos trabalhos encontrados sobre o uso da GD para o estudo das transformações em gráficos de funções que encontramos em nossa revisão de literatura. Os autores definem tipos de transformações e apresentam algumas atividades, sem explorar explicitamente as leis das funções ou apresentá-las de uma forma mais geral, em que os coeficientes aparecem como parâmetros a serem modificados num *software*, por exemplo.

Reconhecendo a importância de um conhecimento aprofundado deste tema, para além de casos particulares, mas buscando a compreensão das características dos diferentes tipos de funções por meio de seu comportamento gráfico, e dos padrões que podem ser generalizados por meio das transformações, realizamos uma oficina com alunos de graduação, descrita na próxima seção.

### 3. Procedimentos metodológicos

Para implementação da oficina, os autores desenvolveram duas sequências didáticas para serem aplicadas, uma na sala de aula regular, e outra, posteriormente e com o mesmo grupo de alunos, num laboratório de informática. Foram dois encontros, cada um com duas horas de duração, em que os autores se revezaram implementando as sequências didáticas e coletando os dados para a pesquisa, por meio de registro de observações e conversas com os licenciandos. No primeiro, os conteúdos foram apresentados com o auxílio de *slides* no *PowerPoint*. Para assumir o dinamismo e envolver a classe, foram usados efeitos de movimentação nos gráficos e, a cada transformação explorada, propostas atividades.

Dada  $f(x) = \sqrt{x}$ , construa no mesmo plano, os gráficos das funções  $f(-x)$ ,  $-f(x)$  e  $-f(-x)$ .

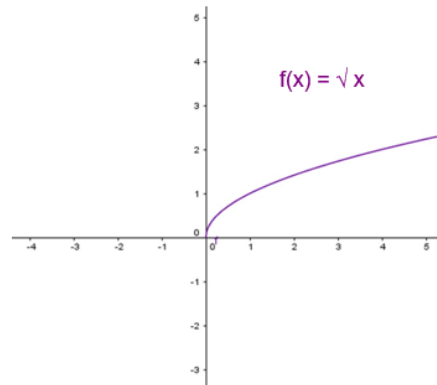


Fig. 1: Exemplo de atividade proposta após a explicação de alguns tipos de transformação.

Já no segundo encontro, a turma foi levada a um laboratório de informática para que individualmente pudessem ser realizadas as construções por meio do *software GeoGebra*, escolhido por ser gratuito e multiplataforma, ou seja, passível de ser utilizado em diferentes sistemas operacionais e tipos de dispositivos.

O *GeoGebra* é um *software* de matemática desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg que reúne num só programa geometria, álgebra e cálculo. É um sistema dinâmico de geometria onde se podem fazer construções de pontos, vetores, segmentos, retas, circunferências, transportar distâncias, tirar paralelas e perpendiculares e construir gráficos. (CUNHA, MORAES, 2008, p. 9)

Como os licenciandos já tinham alguma experiência com o *GeoGebra*, não foi necessário apresentar seus comandos. A sequência didática desenvolvida com o auxílio do *software* explorava as mesmas transformações apresentadas no primeiro encontro, mas agora, com funções cujos gráficos são pouco explorados sem o auxílio de um pacote computacional, como, por exemplo, funções polinomiais com grau maior que quatro, e composições de funções trigonométricas com funções exponenciais. Durante toda a experiência os autores fizeram vários questionamentos para que os alunos fossem fazendo descobertas por si só.

Os objetivos desse encontro foram: fazer uso do recurso de animações do *GeoGebra*, que permite a visualização das transformações em tempo real, a medida em que os parâmetros são variados; trabalhar com gráficos de funções básicas e funções pouco exploradas, analisando os resultados e levando a percepção que as modificações gráficas independem do tipo de função escolhida; identificar a transformação isométrica aplicada a partir das mudanças ocorridas no gráfico da função original.

#### 4. Resultados e discussões

Para avaliar o aprendizado, ao fim do segundo encontro, os licenciandos foram convidados a realizar a seguinte atividade: *Dado o gráfico de uma função  $f$  na variável  $x$ , esboce o gráfico de  $g(x) = a + bf(cx + d)$ , assumindo os parâmetros  $a, b, c, d$  como números racionais entre  $-3$  e  $3$ . Qual o papel de cada parâmetro nas transformações observadas?* O uso do *software* foi recomendado, mas não imposto.

Esperava-se que os participantes da oficina chegassem às seguintes conclusões, com ou sem o uso do *software*, em acordo com o apresentado por Malta, Pesco e Lopes (2002).

- $a$  atua na translação vertical do gráfico de  $f$  em  $a$  unidades:
  - Se  $a > 0$ , a translação é para cima;
  - Se  $a < 0$ , a translação é para baixo.
- $b$  atua da seguinte forma:
  - Se  $b = -1$ , temos uma reflexão do gráfico de  $f$  em relação ao eixo das abscissas;
  - Se  $0 < b < 1$ , temos uma contração vertical uniforme do gráfico de  $f$ ;
  - Se  $b > 1$ , temos uma expansão vertical uniforme do gráfico de  $f$ ;
  - Se  $-1 < b < 0$ , temos uma reflexão do gráfico de  $f$  em relação ao eixo das abscissas, seguida de uma contração vertical;
  - Se  $b < -1$ , temos uma reflexão do gráfico de  $f$  em relação ao eixo das abscissas, seguida de uma expansão vertical.
- $c$  atua da seguinte forma:
  - Se  $c = -1$ , temos uma reflexão do gráfico de  $f$  em relação ao eixo das ordenadas;
  - Se  $0 < c < 1$ , temos uma expansão horizontal uniforme do gráfico de  $f$ ;
  - Se  $c > 1$ , temos uma contração horizontal uniforme no gráfico de  $f$ ;
  - Se  $-1 < c < 0$ , temos uma reflexão do gráfico de  $f$  em relação ao eixo das ordenadas, seguida de uma expansão horizontal;
  - Se  $c < -1$ , temos uma reflexão no gráfico de  $f$  em relação ao eixo das ordenadas, seguida de uma contração horizontal.
- $d$  atua na translação horizontal do gráfico de  $f$  em  $d$  unidades:
  - Se  $d > 0$ , a translação é para esquerda;
  - Se  $d < 0$ , a translação é para direita.

Observou-se que todos os alunos optaram por resolver a atividade utilizando o *GeoGebra*, e não se limitaram ao intervalo sugerido, dada a praticidade em alterar os valores dos parâmetros, o que no papel levaria muito mais tempo. Muitos licenciandos optaram por variar todos os parâmetros ao mesmo tempo, e não conseguiram observar com clareza as transformações associadas a cada um, principalmente em se tratando dos parâmetros  $b$  e  $c$ .

O envolvimento da turma com sugestões, implicou em uma alternativa de resolução. Depois de muita discussão entre os presentes, um dos discentes sugeriu a modificação de apenas um parâmetro por vez, e depois dois a dois, até que todos fossem alterados de forma combinada e diferentes tipos de transformações pudessem ser observados de forma mais nítida, levando os alunos a uma maior segurança em suas generalizações.

Após a realização das atividades, promovemos um debate sobre a forma de abordar o estudo de translações, reflexões, expansões e contrações. O grupo trouxe uma reflexão importante a respeito do estudo qualitativo do assunto, que usualmente é limitado ao registro de pontos no plano, com auxílio de uma tabela, priorizando apenas o procedimento em detrimento do conceito.

A busca pela metodologia mais adequada também representou uma preocupação pela equipe. Questionados sobre qual a forma de abordagem teve maior impacto em sua aprendizagem, se em sala de aula com o uso de *slides* ou se com a manipulação do *GeoGebra*, o grupo foi unânime na escolha da segunda opção, por conta das possibilidades de uso do ambiente de Geometria Dinâmica como um espaço para investigação. Porém, para isso, exige-se que o professor esteja preparado e que seja um mediador, que saiba o momento de intervir.

## 5. Considerações finais

No contexto atual de globalização, é de grande importância a inclusão das tecnologias no ensino em sala de aula e fora dela. O envolvimento do aluno com o tema, a possibilidade de simplificação do aprendizado e o dinamismo gerados por essa união podem acarretar em uma melhor qualidade na aquisição do conhecimento.

As propostas levantadas nesse trabalho e seus resultados nos permitem acreditar que o estudo das transformações em gráficos de funções, tipicamente não exploradas por livros didáticos do Ensino Médio. Dada a importância do assunto para o processo de abstração e aprofundamento no conhecimento do comportamento das funções, visualizado por meio de seus

gráficos, acreditamos que o uso investigativo de ambientes de Geometria Dinâmica pode ser um grande facilitador para professores e alunos.

Tendo acesso a esse tipo de formação diferenciada para o estudo de funções, em particular, das transformações em seus gráficos, os futuros professores de Matemática poderão se ambientar com o uso de *softwares* para explorar determinados conceitos que, numa sala de aula regular, seriam dificultados pelo processo natural de exploração da variação de cada parâmetro de uma função, como na atividade apresentada, por exemplo. De forma mais geral, é importante que o uso de tecnologias não seja uma mera transposição do meio físico para o digital, mas que os licenciandos sejam formados para explorar suas potencialidades para além do que pode ser feito pelos meios tradicionais, para que seu uso realmente tenha impacto diferenciado na formação do estudante.

## 6. Referências

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática. Ensino Fundamental – Terceiro e Quarto Ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CUNHA, I. G., MORAES, P. O ensino de funções e de transformações geométricas com o auxílio do software Geogebra. Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/minhapagina/Microsoft%20Word%20-%20transforma%E7%F5es%20geogebra.pdf>. Acesso em 15 mar 2016.

ESQUINCALHA, A. C., PINTO, G. M. F. Avaliação do uso de animações interativas em salas de aula de matemática do ensino médio. In: VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, 2013, Montevideo, Uruguay. *Actas...*, FISEM, 2013.

ESQUINCALHA, A. C., ROBAINA, D. T., RODRIGUES, M. G. Ensino das cônicas mediado por sua história e pelo uso da Geometria dinâmica. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Recife, Pernambuco. *Anais...*, SBEM, 2010.

GAFANHOTO, A. P. R. Integração das diferentes representações das funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra). Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade de Évora, 2010.

KENSKI, V. V. (2007). *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. Campinas: Editora Papirus.

MALTA, I., PESCO, S., LOPES, H. *Cálculo a uma variável*. Volume 1. Rio de Janeiro: PUC-Rio; São Paulo: Loyola, 2002.



MASSETO, M. T. (2009). Medição pedagógica e o uso da tecnologia. In: MORAN, J. M.; MASSETO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e medição pedagógica*, Capítulo 2, pp. 67-132. Campinas: Papirus.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. *Revista Educação e Matemática*, n.15, 1990.

REZENDE, W. M., PESCO, D. U., BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, v. 1, n. 1, 2012.