

## A INTERFACE DA GEOMETRIA PLANA À ESPACIAL: UM ESTUDO A PARTIR DOS TRIÂNGULOS E DOS SÓLIDOS DE PLATÃO

*Ricardo Benedito de Oliveira  
Universidade Federal do ABC  
ricardo.benedito@ufabc.edu.br*

*Liliana Quintero Lopez  
Universidade Federal do ABC  
Liliana.quintero@ufabc.edu.br*

*Virginia Cardia Cardoso  
Universidade Federal do ABC  
virginia.cardoso@ufabc.edu.br*

### **Resumo:**

Pesquisas em Educação Matemática sobre o tema nos têm evidenciado que o ensino e a aprendizagem da Geometria na Escola Básica vêm se revelando problemática face aos resultados das avaliações oficiais, cujos índices de conhecimentos apresentados pelos alunos são insatisfatórios, direcionando-nos a uma aprendizagem fragmentada dos conteúdos em sala de aula. Em relação aos conteúdos abordados no Ensino Fundamental e Médio, o estudo dos triângulos se faz presente e embora seja num primeiro momento algo simples, a riqueza de suas propriedades faz dele uma das figuras geométricas importante no Ensino da Geometria. O objetivo do minicurso é criarmos momentos de estudo e reflexões com foco nos triângulos e também refletirmos sobre a importância da transição do plano bidimensional ao tridimensional, onde iremos explorar conceitos espaciais dos sólidos platônicos, a partir dos conhecimentos dos conteúdos de triângulos, facilitando assim a compreensão e diferenciação do plano e do espaço.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Geometria Plana e Espacial; Sólidos de Platão.

### **1. Introdução**

O aluno merece ler e entender as Ciências e a Matemática, para exercer seu papel nesta sociedade contemporânea, entretanto neste início de um novo século, muitas são as questões que merecem ser (re) pensadas, mas certamente uma delas se faz urgente e se destaca das demais: a Educação. No atual processo evolutivo que todos enfrentamos, o conhecimento matemático se apresenta como uma ferramenta necessária e indispensável na compreensão e na análise dos vários fenômenos do nosso cotidiano. Parra e Saiz (1996, p.11) a figura do professor se faz importante, afinal a missão é de

preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho com comodidade e eficiência no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade

A Matemática é uma Ciência que tem por objetivo os números, as formas, as grandezas e as operações entre esses elementos, e estando o mundo cada vez mais matematizado, o desafio da escola é na construção de uma formação integradora, não se apoiando somente no ensino de algoritmos e cálculos mecanizados, mas sim visando a compreensão efetiva das ferramentas científicas para uma leitura interpretativa do nosso Planeta, e a Geometria é uma dessas ferramentas.

## 2. Constatações e Implicações educacionais

Programas oficiais de ensino, desde muito tempo, preveem que os docentes têm a obrigatoriedade em iniciar as primeiras noções básicas da Geometria trabalhando com as formas planas, dentre elas as mais conhecidas o quadrado, o triângulo e o círculo, cujo aprendizado deve ocorrer a partir dos Anos Iniciais no Ensino Fundamental.

Já as etapas subseqüentes os conteúdos de Geometria serão aprofundados, mas tem sido um fato que os conceitos de figuras planas, normalmente ocorrem por meio de dedução de fórmulas e resolução de problemas, sendo, neste último caso, algo muito mecânico, o que pouco tem contribuído para o desenvolvimento do pensamento geométrico uma vez que os alunos em sua grande maioria não conseguem fazer uma relação do plano bidimensional quando do ensino da geometria espacial. Um exemplo por nós observado na prática em sala de aula, encontramos estudantes chamando o cubo de quadrado e a esfera de círculo.

Pesquisas como Pirola (1995) e Bueno (2009) identificaram este cenário, afinal esses pesquisadores utilizaram-se da figura do triângulo em seus estudos, e concluíram que os alunos apresentam muitas dificuldades na identificação da figura do triângulo quando a posição é variada. Pirola(1995) mandou os alunos desenharem um exemplo de triângulo, e a predominância dos triângulos desenhado pelos alunos foram isósceles ou retângulos, entretanto os alunos tiveram uma dificuldade na identificação de uma figura de um triângulo escaleno obtusângulo.

É fato que as pesquisas realizadas nas últimas décadas continuam indicando a ausência da abordagem dos conteúdos de Geometria em sala de aula, e quando ocorrem, em sua maioria acontecem com o emprego de fórmulas e lista de exercícios. Com o estudo das figuras espaciais no Ensino Médio, também não parece-nós não ser muito diferente, pois os docentes continuam receitando fórmulas e problemas algébricos o que tem tornado algo

mecânico e pouco produtivo, cujo resultado tem sido constatado na fragilidade do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos.

Conseqüentemente, no Ensino Médio que deveria garantir a abstração dos conteúdos de Geometria Plana e Espacial, tem sido prejudicada, onde a visualização e a representação elementos importantes nesse processo formativo não tem sido trabalhado em sala de aula, por deficiências apresentadas nas etapas anteriores. Algumas reflexões feitas por Alarcon (1978) citado por Galves (1996, p.250) confirmam nossa fala, pois para a autora, “o ensino da Geometria, em nossas escolas primárias, se reduz a fazer com que nossos estudantes memorizem os nomes de figuras, ou mapas geométricos e as fórmulas que servem para calcular áreas e volumes”.

Outras pesquisas como Nasser (1992), Oliveira (1998) e Pirola (1995), verificaram que são muitas as dificuldades dos alunos para reconhecerem figuras geométricas, sejam elas planas ou espaciais mais simples, o que certamente reflete o abandono do ensino da Geometria na escola. Enfatizamos novamente que a habilidade de visualizar figuras no plano bi e tridimensional é tão importante quanto ao próprio desenvolvimento do raciocínio numérico ou algébrico, como as próprias orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais nos encaminham a percebermos que

as relações entre representações planas nos desenhos, mapas, na tela do computador com os objetos que lhe deram origem, conceber novas formas planas e espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras Ciências. (Brasil, 1999, p.257).

Nossa prática docente somado as pesquisas desenvolvidas pela comunidade científica temos identificado que a prioridade dada aos conteúdos algébricos tem impulsionado fortemente para o desenvolvimento de apenas um tipo de pensamento, ressaltamos o ponto de vista de Pavanello (1989, p.181), que o papel da Geometria não significa minimizar o da álgebra, “há necessidade de se cultivar e desenvolver tanto o pensamento visual dominante da Geometria, quanto o sequencial preponderante na Álgebra, pois ambos são essenciais a Educação Matemática”.

Por sua vez, a Geometria Espacial deve funcionar como uma prorrogação da Geometria Plana, onde se trabalha com o estudo dos objetos espaciais e as relações entre seus elementos, estudo esse iniciado a partir de conceitos primitivos como retas, pontos, segmentos de retas, curvas e planos, estendendo-se para o cálculo de áreas e de volumes de regiões

sólidas. Embora sejam importante o estudo dos conhecimentos espaciais e suas inter-relações, ainda tem sido desenvolvido em sala de aulas desvinculados da Geometria Plana,.

Neste minicurso, pretendemos fazer uma interface da Geometria Plana à Geometria Espacial, partindo do estudo dos triângulos para chegarmos ao estudo dos sólidos platônicos, uma vez que ambas as disciplinas assumem como uns dos principais mecanismos no desenvolvimento da inteligência espacial, assim sendo, no estudo dos triângulos como as demais formas planas devam ocorrer a partir de atividades que explorem as capacidades de visualização e representação.

### 3. Objetivos, Público Alvo

Este minicurso é destinado a professores do Ensino Fundamental, Médio e Superior e alunos de Graduação em Licenciatura Matemática, como também ao público em geral, tendo como objetivo a criação de um espaço de reflexão, discussão, troca de experiências e principalmente de estudos. Recapitularemos algumas das principais propriedades dos triângulos, seus pontos notáveis e a seguir faremos a transposição do plano bidimensional para o tridimensional, utilizando os estudos dos sólidos platônicos e suas propriedades, assim sendo as etapas a serem desenvolvidas serão:

- Inicialmente serão abordadas algumas perspectivas do Ensino de Geometria nos Anos Iniciais, no Ensino Fundamental (5º ao 9º ano) e no Ensino Médio;
- A seguir as propriedades principais dos triângulos, como tipos, classificação, importância do seu estudo finalizando com seus pontos notáveis;
- Na etapa seguinte os sólidos platônicos, os cinco sólidos, suas características e propriedades, a relação de Euler, e a demonstração de sua existência.
- Na última etapa, a construção utilizando apenas régua e compasso do quebra-cabeça do tetraedro.

### 4. Etapa do desenvolvimento minicurso.

Inicialmente iremos abordar algumas perspectivas do Ensino da Geometria no Ensino Fundamental e em seguida os participantes terão contato com diferentes tipos de triângulos que iremos classificar. Na próxima etapa abordaremos suas propriedades, pontos notáveis, apresentação que terá um caráter elementar (informativo), afinal muitos dos nossos alunos e

inclusive uma parcela dos professores desconhece a existência de outros pontos notáveis nos triângulos além dos tradicionais que são o incentro, circuncentro e ortocentro. Exemplificando nesse sentido temos pontos notáveis associadas ao triângulo como os pontos Feuerbach, de Lemoine, Gergonne, Nagel e Skipper.

Apenas para destacar neste contexto a Enclyckioedua IF Triangle Center (ETC) do professor americano Clark Kimberling da Universidade Evansville apresenta em seus trabalhos 5.405 pontos notáveis do triângulo, e provavelmente existam muitos outros.

A escolha pela figura do triângulo ocorreu, após estudo detalhado do trabalho de doutoramento de Pirola (2000) onde o autor nos direciona as grandes dificuldades que enfrentam os alunos do Ensino Fundamental na compreensão das propriedades e identificação desta figura geométrica.

Já a experiência de Oliveira (2014) realizada na Feira de Ciências Exatas (Matemática e Física) na escola pública, demonstrou que os alunos do 6º ano desenvolveram estudos e realizaram a construção dos sólidos, onde articularam o concreto e o abstrato demonstrando assim que além de ser um importante instrumento para abordar conceitos de geometria espacial, o estudo dos sólidos platônicos também proporciona um rico ambiente para abordagem de conceitos da geometria plana.

Pretendemos nesta etapa afiançar os conhecimentos dos participantes. Na segunda etapa, pediremos para os participantes construir alguns corpos geométricos a partir do uso dos triângulos. O objetivo é que eles mesmos descubram quais tipos de triângulos podem ser usados e quantos são necessários para a construção de diferentes sólidos.

Abordaremos a seguir, as definições dos sólidos platônicos e suas principais características, a relação de Euler e como esses sólidos geométricos se relacionam com as figuras planas, explorando assim a visualização dos participantes bem como articular as propriedades geométricas desses sólidos e a partir dessa visualização o levantamento de conjecturas conduzindo-os a generalização das propriedades particulares desses sólidos.

Finalmente com o objetivo de levar as discussões para a prática, iremos propor a construção do quebra-cabeça do tetraedro com régua e compasso seguindo o roteiro que se encontra a seguir.

## 5. Atividade - Quebra-cabeças tetraédrico

- A. Utilizando régua e compasso traçar uma circunferência de raio 6 cm

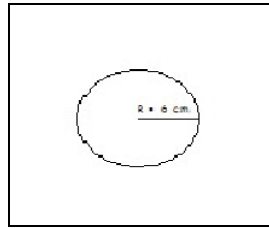


Figura 1: construção da circunferência

- B. Inscrever um hexágono regular de 6 cm de lado

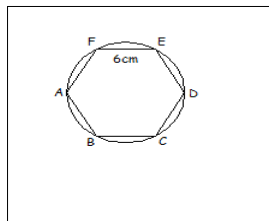


Figura 2: inscrição hexágono na circunferência

- C. Sobre o segmento EF, construir um quadrado de lado EF.

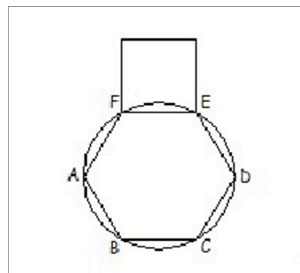


Figura 3: construção do quadrado

- D. Sobre os segmentos AF e DE construir triângulos equiláteros de lados AF e DE

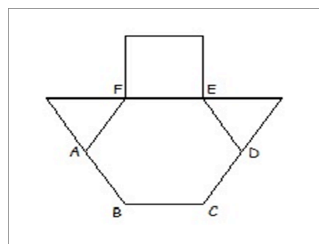


Figura 4: construção dos triângulos equiláteros

- E. Traçar um segmento de reta que passe por A y D. Fazer “bordes” para colar ele mais fácil (vai ficar como se vê na figura abaixo).
- F. Recortar e colar o poliedro.

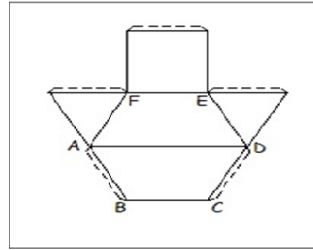


Figura 5: construção das bordas triangulo

- G. Repetir o mesmo processo até obter outro poliedro igual.
- H. Com os dois poliedros montaremos o tetraedro.
- I. Descreve as estratégias que vocês utilizaram para encontrar a solução.
- I. Porque é possível que estas duas figuras congruentes permitam a construção do tetraedro?
- J. O tetraedro também pode ser construído a partir de 4 partes congruentes. Fica como desafio!!

## 6. Considerações Finais

No Ensino da Geometria, muitas pesquisas vêm nos alertando da importância que esse aprendizado ser iniciado desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, e seja aprofundado nas etapas subsequentes. Santaló (1996, p.18) destaca que “desde as primeiras séries, é preciso ir educando não só na Matemática propriamente dita, mas também no raciocínio lógico e dedutivo que é a base da matemática”. Essas constatações nos motivaram a apresentar este minicurso, pois as atividades que serão desenvolvidas buscam uma integração com nossos objetivos principais que são estimular os participantes a fazerem suas próprias observações no espaço tridimensional.

Em síntese, “a Geometria da Matemática não é o estudo do espaço e de nossas relações com o espaço, mas o lugar em que é exercido um raciocínio levado a sua excelência máxima” (Laborde, 1984, p.243), enfim, os diversos conteúdos de Geometria necessitam obrigatoriamente serem assimilados pelos nossos alunos, afinal como nos diz Lorenzato (1995, p.6), ela é “a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui, ela se interage com a aritmética e com a álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras”.

Vivemos num mundo em três dimensões e ensinamos nas escolas a Geometria desde o plano sem fazermos nenhuma interligação, por isso achamos esta problemática um assunto que necessita de maiores discussões.

## 7. Agradecimentos

Nossos agradecimentos a CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, ao Observatório da Educação Rede Colaborativa de Práticas na Formação dos Professores que Ensinam Matemática: múltiplos olhares, contextos e diálogos e ao Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e da Matemática da Universidade Federal do ABC.

## 8. Referências

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Fundamental e Ensino Médio, Brasília- DF, Ministério da Educação, 1999.

GALVEZ, G. A. **A Geometria, a psicogênese das noções espaciais e o Ensino da Geometria na Escola Primária**. In: PARRA, C. SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões Psicopedagógicas**, Editora Artmed, 1996.

LABORDE, C. **Exposé sur La géométrie, Troisième, École d'pEte de Didactique des Mathématiques**, Olivet, 1984

LORENZATO, S. **Porque Ensinar Geometria?** In: Revista em Educação Matemática, n. 4, 1995.

OLIVEIRA, R.B. **Sólidos de Platão e de Arquimedes**. In: MANRIQUE, A. L. (Org) **Aprendizagem da Docência: Pesquisas e Práticas Formativas em Ambiente Escolar**, Editora Apprus, 2014, p.221-229.

PAVANELLO, R. M. **O abandono da Geometria: uma visão histórica**. Dissertação de Mestrado em Educação, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 1989.

SANTALÓ, L. **Matemática para não matemáticos**. In: PARRA, C, SAIZ, I. **Didática da Matemática: Reflexões psicopedagógicas**, Editoda Artmed, 1996.