ADAIR MENDES NACARATO
IRIS APARECIDA CUSTÓDIO
Organizadoras

NARRATIVAS DE AULAS DE MATEMÁTICA

DE UMA COMUNIDADE DE INVESTIGAÇÃO COMO PRÁTICA DE FORMAÇÃO DOCENTE

Biblioteca do Educador
Coleção SBEM
Volume 14

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

ADAIR MENDES NACARATO
IRIS APARECIDA CUSTÓDIO
Organizadoras

NARRATIVAS DE AULAS DE MATEMÁTICA DE UMA COMUNIDADE DE INVESTIGAÇÃO COMO PRÁTICA DE FORMAÇÃO DOCENTE

Autores:

ADAIR MENDES NACARATO
ARTHUR B. POWELL
CAIO LEARDINI GRILLO
CARLA CRISTIANE SILVA SANTOS
CIDINÉIA DA COSTA LUVISON
CLAUDIA CRISTIANE BREDARIOL LUCIO
DANIELA DIAS DOS ANJOS
GIANCARLA GIOVANELLI DE CAMARGO
IRIS APARECIDA CUSTÓDIO
JAQUELINE APARECIDA FORATTO LIXANDRÃO SANTOS
JULIANA BAGNE
KÁTIA GABRIELA MOREIRA
KELLY CRISTINA BETERELI
MARJORIE SAMIRA FERREIRA BOLOGNANI
RAQUEL FERNANDES GONÇALVES MACHADO
ROSANGELA ELIANA BERTOLDO FRARE
SELMA NASCIMENTO VILAS BOAS

Biblioteca do Educador
Coleção SBEM
Volume 14

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Copyright © 2020 Sociedade Brasileia de Educação Matemática. Todos os direitos reservados

Coordenação Editorial
Marcelo Almeida Bairral
Vanessa Franco Neto
Reginaldo Carneiro

Conselho Editorial
Alex Jordane de Oliveira
André Luis Trevisan
Antonio Carlos Fonseca Pontes
Carlos Augusto Aguilar Júnior
Clélia Maria Ignatius Nogueira
David Antonio da Costa
Fernanda Malinosky Coelho da Rosa
Gilda Lisbôa Guimarães
Janete Bolite Frant;
João Alberto da Silva
Jonei Cerqueira Barbosa
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Milton Rosa
Paulo Afonso Lopes da Silva
Romaro Antonio Silva
Sintria Labres Lautert
Suzi Samá Pinto

Publicação
Sociedade Brasilera de Educação Matemática

Projeto Gráfico e Capa
Janaína Mendes Pereira da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Narrativas de aulas de Matemática de uma comunidade de investigação como prática de formação docente [livro eletrônico] / organização Adair Mendes Nacarato, Iris Aparecida Custódio. -- 14. ed. -- Brasília : Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2019. -- (Coleção bem ; 14 / coordenação Adair Mendes Nacarato, Iris Aparecida Custódio)
10 MB ; eBook

Bibliografia
ISBN: ISBN 978-85-98092-56-0

1. Educação - Finalidade e objetivos 2. Educação matemática 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Professores - Formação I. Nacarato, Adair Mendes. II. Custódio, Iris Aparecida. III. Série.

20-32262 CDD-519.5

Índices para catálogo sistemático:
1. Estatística : Formação de professores : Educação matemática 519.5
Iolanda Rodrigues Biode - Bibliotecária - CRB-8/10014

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DIRETORIA NACIONAL EXECUTIVA

Marcelo Almeida Bairral (UFRRJ)

Presidente

Fátima Peres Zago de Oliveira (IFC - Campus Rio do Sul)

Vice-Presidente

Geraldo Eustáquio Moreira (UnB)

Primeiro Secretário

Vanessa Franco Neto (UFMS)

Segunda Secretária

Maurício Rosa (UFRGS)

Terceiro Secretário

Leandro de Oliveira Souza (UFU)

Primeiro Tesoureiro

Ana Virgínia de Almeida Luna (UEFS)

Segunda Tesoureira

Conselho Nacional Fiscal

Antonio Carlos de Souza (UNESP - Campus de Guaratinguetá)

Everton José Goldoni Estevam (UNESPAR - Campus de União da Vitória)

Verônica Gitirana (UFPE)

Rhômulo Oliveira Menezes (SEDUC-PA / UFPA)

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Talvez sejamos nós mesmos os que estamos enjaulados junto com a nossa experiência, e damos voltas e mais voltas sobre nós mesmos, sem nenhum outro, sem nenhum exterior, sem nenhum acontecimento, sem nenhuma surpresa, sem nada distinto a nós mesmos [...] que nos atinja, ou que nos aconteça, ou que nos enfrente. E talvez nossa vontade de viver tenha a ver às vezes com um desejo de tirar a experiência da jaula, de fazê-la sair, de abri-la para o lado de fora, com um desejo de sairmos nós mesmos da jaula. A pergunta é agora "como sair daqui?" Trata-se de liberar a experiência, de fazê-la sair da jaula, de conseguir uma forma de liberdade. (LARROSA, 2014, p. 105-106)[1]

As palavras de Larrosa representam uma leitura muito próxima do que encontramos neste livro. Experiências que ousaram sair da jaula. Experiências construídas no chão da escola e delicadamente compartilhadas conosco, leitores. Os agentes dessa ousadia são professoras que tomam a sua sala de aula, ou a sala de aula de uma parceira, e colaborativamente tecem experiências. Que poderiam ficar ali, guardadas na memória, na lembrança, na imagem videogravada, no som audiogravado. Mas não! As experiências vêm à tona, brotam em textos narrativos, que contam as histórias de aulas e são compartilhadas em vários espaços: no grupo colaborativo, nos eventos em que são oralizados, nos artigos, nas dissertações, nas teses, nos textos e nas imagens de alunos, na leitura e na escrita do formador que escreve e aprende com as escritas dos professores investigadores. Meu encontro com o "texto/experiência fora da jaula" foi vivenciado quando li cada história aqui contada.

Esta obra representa mais uma importante contribuição do Grucomat, Grupo Colaborativo em Matemática, para o campo da investigação e das práticas em Educação Matemática. Para mim tem um sabor especial a leitura destes textos, porque não me sinto estrangeira. Também desse grupo já fiz parte e sinto saudade. Saudade do encontro, da ética, do respeito à aprendizagem dos alunos e dos professores-formadores-investigadores.

Um livro tecido a muitas mãos, mãos que compartilham, que respeitam os momentos individuais e coletivamente vão textualizando as práticas de professoras pesquisadoras em suas salas de aula. Mas escrevem sobre o quê? Sobre as experiências em que o grupo esteve debruçado por mais de três, quatro anos. Como sempre, uma marca desse grupo é a ousadia. Foram muitos os momentos de ousadia, desde a possibilidade de estudos sobre um campo recente de investigação do Brasil, que é a Educação Algébrica na Infância. Ousadia na construção de tarefas para a sala

[1] Larrosa, J. *Tremores*: escritos sobre experiência. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

de aula, envolvendo padrões, regularidades e sequências, desde a Educação Infantil. E para isso.... haja criatividade! Ousadia na forma de propor os problemas com o uso de diferentes recursos: materiais manipulativos, fotografia, histórias, problemas. Ousadia e coragem no registro do que acontece na sala de aula. Ousadia no jeito claro de narrar o que aconteceu na sala de aula, o que pôde ser ressignificado na escrita da narrativa, novamente na socialização das experiências e nas várias sistematizações e reescritas do texto – até o capítulo final que ousadamente entregam a nós, leitores, professores, pesquisadores, estudantes e curiosos.

O campo de investigação em Educação Algébrica, desde a Infância, apesar de recente nos estudos brasileiros, já foi proposto como um dos eixos estruturantes na Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental (BNCC, 2017). Esse conteúdo, tradicional nos estudos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, ainda era pouco explorado nos anos iniciais, e raramente na Educação Infantil. Essa ideia permanece carregada de falsas concepções sobre a própria Educação Algébrica, de que se restringe aos usos de símbolos, regras, manipulação algébrica, letras que assumem as funções de incógnita e variável em equações, funções, expressões. Como nos inserir nesse campo de estudos, com tais características, se estamos pensando nas crianças da primeira, da segunda infância? Esse é o desafio que muitos grupos de estudos, autores de materiais didáticos, professores formadores dos cursos de Pedagogia, etc. passaram a ter depois da BNCC.

Juliana, Marjô, Giancarla e Selma trazem, em suas narrativas com estudantes da Educação Infantil, a ludicidade. A descoberta de padrões, regularidades e “segredos” acontece em meio a brincadeiras. Engana-se quem acredita que é preciso “parar de brincar” para aprender matemática na Educação Infantil. Ela acontece nas brincadeiras, nos jogos de faz de conta, no mundo simbólico infantil, na possibilidade de um olhar atento, da professora que ensina matemática e que sabe também reconhecer o momento de problematizar matematicamente aquelas brincadeiras. Para quem pensa que planejar histórias e situações na Educação Infantil é fácil...poderia passar um dia na sala de aula da Educação Infantil tentando entreter as crianças e envolvê-las na tarefa. Assim fizeram essas professoras. Elas foram contando histórias, vivenciando corporalmente situações, criando tarefas de manipulação de materiais, jogando simbolicamente e, enquanto as crianças participavam, manipulavam e se movimentavam corporalmente, também suas ideias e pensamentos algébricos (padrões, regularidades) se movimentavam.

É possível que a leitura destes capítulos de narrativas de aula inspire o desejo de muitos professores de também experimentar na sua sala de aula. Vá em frente! Experimente, mesmo que essa experiência ainda “fique na jaula”. Mas busque compreender em que a sua experiência foi diferente. Também é possível que você, leitor, perceba que muito do que você já faz na sala de aula com os estudantes pode ser problematizado matematicamente.

Cidi, Carlinha e Kátia narram suas experiências com as crianças nos anos iniciais do Ensino Fundamental. É interessante acompanhar esse movimento e perceber como a Educação Algébrica vai possibilitando às crianças avançarem em suas compreensões. Observar regularidades, compreender padrões e ensaiar generalizações, mesmo que utilizando uma linguagem própria, da criança, que faz sentido a ela. Isto tudo possibilita a nós, leitores, perceber o quanto subestimamos, muitas vezes, a capacidade das crianças de pensar fora da situação observável e produzir generalizações, imaginar leis mais gerais que explicam as regularidades. A apropriação/construção, pelas crianças, de uma linguagem que exprime as regularidades observadas e as generalizações construídas possibilita reconhecer o letramento algébrico no qual essas crianças estavam envolvidas.

Claudinha, Jaque, Kelly e Raquel produziram suas narrativas a partir de experiências nos anos finais do Ensino Fundamental. Ali observamos o amadurecimento dos alunos quanto à apropriação de uma linguagem algébrica articulada a um movimento de pensamento algébrico. Percebemos como as problematizações das professoras foram fundamentais para o processo de generalização nos padrões e nas sequências pelos estudantes. Também as professoras investigadoras aprenderam com os diferentes modos algébricos de pensar de seus estudantes. Apesar de a Educação Algébrica já fazer parte dos currículos escolares nesse nível de ensino, também se faz necessário ressignificá-la por meio de tarefas que possibilitem aos estudantes investigar, levantar hipóteses, experimentar, generalizar, comparar leis de formação, produzir explicações para os fenômenos que observam, para as regularidades.

Rosangela traz uma grande contribuição ao livro, com uma experiência envolvendo os estudantes do Ensino Médio. Tradicionalmente, esse é um nível de ensino em que a Álgebra está muito presente, em quase todo ele. Entretanto, a professora pesquisadora instiga seus alunos por meio de problemas pouco convencionais do livro didático (problemas da OBMEP), o que causa estranheza aos alunos, habituados à aplicação de uma fórmula de resolução, como uma progressão aritmética ou algébrica. Mas a professora vai, por meio da tarefa, problematizando, criando uma cultura outra de aula de Matemática, orientando-os ao uso de uma linguagem algébrica para cada situação de generalização. Notamos como os estudantes avançam em seus discursos matemáticos. Parecem mais seguros de suas “leis de formação”, defendendo suas formas de representar e suas variadas “estratégias de resolução”.

Na leitura deste conjunto de experiências narradas pelas professoras investigadoras encontramos o papel do Grucomat no processo de constituição de tais experiências. Elas reconhecem os movimentos importantes que acontecem no grupo e que envolvem estudos, elaboração de tarefas, ação na sala de aula, reflexões compartilhadas, narrativas orais, análise colaborativa de discursos de alunos, ressignificações de práticas, novas experiências, escrita, (re)escrita, conversa, novos estudos, outros espaços de socialização para além do grupo, produção do capítulo, leitura de outros capítulos etc. O grupo é visto como um espaço formativo e de aprendizagens colaborativas e cada vez mais propicia a seus participantes um empoderamento que lhes possibilita ousar criativamente, acreditar em uma educação matemática de qualidade em todos os níveis de ensino.

Essa percepção sobre a importância do Grucomat, destacada pelas professoras, também é percebida e sistematicamente investigada por Daniela e Rosangela, quando pesquisam o movimento de ação coletiva no Grucomat como um alimento para a atividade individual. Não é uma prerrogativa exclusiva das narrativas escritas das professoras essa evidência, pois está presente também nos relatos orais, nas análises dos vídeos de aulas e em outros instrumentos que perpassam as ações no Grucomat.

Também Iris e Adair contribuem para compreender o processo formativo dos professores no Grucomat como um dos eixos destacados de análise no seu capítulo-síntese. Um olhar retrospectivo para os capítulos possibilita às autoras reconhecerem o movimento de desenvolvimento profissional docente e o empoderamento sentido pelas participantes-autoras-professoras-pesquisadoras nos processos de socialização e análise das aprendizagens dos estudantes.

Tecem ainda este livro os textos que buscam sustentar e compreender o movimento do que acontece no Grucomat, bem como as aprendizagens docentes nas experiências narradas do ponto de vista dos processos e das estratégias de formação de professores.

A proximidade metodológica entre o que acontece no Grucomat e a *design research* destacada por Adair, Iris e Caio possibilita-nos pensar o quanto este livro representa uma das principais características dessa teoria, que é o conceito de validade ecológica (POWELL; ALI, 2018, p. 225)[2]. Nesse conceito, espera-se que os relatórios de pesquisa descrevam as reais condições sobre o que acontece na sala de aula, evidenciem a complexidade da prática e revelem como tais condições podem ter influenciado o processo de aprendizagem. Entendo que este livro representa esse aspecto no *design research* do Grucomat. O momento de expor e ao mesmo tempo expor-se, no sentido de aproximar os processos de teorização sobre uma prática escolar.

A agência matemática destacada por Arthur nos possibilita pensar como os professores pesquisadores do grupo, ao se sentirem empoderados, também reproduziam em suas práticas de sala de aula um discurso de empoderamento aos seus estudantes. A compreensão matemática, a apropriação de um discurso, o letramento algébrico, assim como a possibilidade de projetar e projetar-se possibilitam processos formativos a estudantes e professores. O que me parece é que esse conceito favorece pensarmos em uma Educação Matemática para o sucesso, em ação protagonizada por alunos e professores e que, ao mesmo tempo, exclui a ideia de insucesso e fracasso em matemática escolar. Entendo que essa discussão traz grandes contribuições ao campo de pesquisa e de práticas em Educação Matemática.

Enfim, tudo o que podemos encontrar neste livro evidencia o respeito com que foi construído. Respeito dos professores-formadores-pesquisadores com o texto que desejavam compartilhar, respeito com o leitor-professor-aluno-pesquisador, por encontrar um livro cheio de vida, que mostra

[2] POWELL, A.; ALI, K. Design research in Mathematics Education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, J.F. *et al. Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT)*: contribuições para pesquisa e ensino. São Paulo: Livraria da Física, 2018. p. 221-242.

o que acontece(ceria) na sala de aula de matemática e o que acontece no grupo colaborativo quando professores, pesquisadores, formadores e, (in)diretamente, estudantes assumem humildemente o papel de colocar-se em processo de escuta, de problematização, de ousadia e de aprendizagem.

Regina Célia Grando
Maio/2019.

APRESENTAÇÃO

Esta obra, composta por 16 capítulos, pretende, por meio de narrativas de práticas e textos teóricos, divulgar o resultado do projeto: "A videogravação de aulas de Matemática como ferramenta para a pesquisa em formação docente: produção e análise de vídeos" (Projeto Universal CNPq – Processo 475848/2012-8), desenvolvido pelo Grupo Colaborativo em Matemática – Grucomat, vinculado ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco.

Ela é destinada a professores que ensinam Matemática, desde a Educação Infantil aos anos finais da Educação Básica; a formadores de professores que atuam em cursos de Pedagogia e Licenciatura em Matemática; e a professores que trabalham com a formação continuada.

O Grucomat foi criado em 2003 e, desde então, conta com a participação de professores que ensinam Matemática na educação básica (da Educação Infantil ao Ensino Médio); estudantes da pós-graduação, que também são professores; e professoras da universidade.

Desde sua criação, o grupo tem como foco a pesquisa em parceria com o professor da Educação Básica, dando visibilidade e protagonismo ao seu trabalho. A forma encontrada para que o conhecimento produzido pelo professor ganhe espaço nas discussões científicas tem sido a produção e a publicação de narrativas de aulas, em que os professores podem socializar e sistematizar suas práticas de aula.

Faz parte da dinâmica do grupo, que se reúne quinzenalmente na Universidade, a escolha de uma temática de interesse dos integrantes, para estudos e elaboração colaborativa de tarefas para serem desenvolvidas em sala de aula. O professor responsável pelo seu desenvolvimento registra sua prática, por meio de áudio ou videogravações, fotografias, diário de campo e narrativas. O material produzido é socializado e analisado pelo grupo, e essas discussões possibilitam reelaborar as tarefas e elaborar novas propostas. Temos como interesses centrais: conhecer os discursos matemáticos produzidos pelos alunos no desenvolvimento das tarefas; e promover espaços formativos para o professor que ensina Matemática.

O Grucomat conta com várias publicações, frutos de produções coletivas. Destacamos dois livros resultantes de projetos financiados pelo CNPq, na linha de fomento Universal: um sobre Geometria[1]; outro sobre Estocástica – Estatística e Probabilidade[2]; e um ebook[3] sobre o desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica. Nessas obras são divulgadas narrativas de práticas dos professores participantes dos projetos, bases teóricas que subsidiaram as pesquisas e propostas de tarefas para serem trabalhadas com alunos. Há no grupo a prática da pesquisa colaborativa: os textos produzidos são ali compartilhados, passam pela avaliação dos pares e por reescritas, até chegarem a uma versão final.

Esta obra é a segunda publicação resultante do terceiro projeto do Universal: "A videogravação de aulas de matemática como ferramenta para a pesquisa em formação docente: produção e análise de vídeos" (Projeto Universal CNPq – Processo 475848/2012-8), iniciado em 2012, que tinha como foco a formação do professor a partir da análise de aulas. A primeira é o *ebook O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática*, organizado por Adair Mendes Nacarato e Iris Aparecida Custódio, que visa compartilhar propostas de sala de sala de aula para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, por meio da divulgação das tarefas elaboradas ou adaptadas pelo grupo e dos resultados obtidos com o trabalho em sala de aula.

Na época, a Álgebra foi tomada como objeto de estudo, em virtude da pesquisa de um dos participantes. No mesmo ano, o Ministério da Educação publicou o documento "Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental"[4], que tinha como objetivo subsidiar a elaboração do Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC). Nesse documento identificamos, nas discussões curriculares nacionais, a presença da Álgebra nos anos iniciais, com vistas a desenvolver o pensamento algébrico.

Naquele ano[5], concluímos que as discussões sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico seriam importantes e trariam contribuições para a formação dos professores que ensinam Matemática, especialmente os dos anos iniciais, que não têm formação específica.

Nos 16 capítulos que compõem esta obra, buscamos socializar: narrativas de práticas dos professores participantes do grupo, resultantes das experiências com o desenvolvimento de algumas das tarefas elaboradas ou adaptadas – algumas delas desenvolvidas em parceria com professores e outras na sala de aula dos próprios pesquisadores e, além disso, uma mesma tarefa foi trabalhada em diferentes níveis de ensino –; uma sistematização da metodologia de trabalho instituída pelo Grucomat ao longo de seus 15 anos de existência; uma discussão sobre o coletivo

---

[1] NACARATO, A. M.; GOMES, A. A. M.; GRANDO, R. G. (org.). *Experiências com geometria na escola básica*: narrativas de professores em (trans)formação. São Carlos: Pedro & João editores, 2008.

[2] NACARATO, A. M.; GRANDO, R.C. (org.). *Estatística e Probabilidade na educação básica*: professores narrando suas experiências. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

[3] NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. *O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica:* compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. 1. ed. Brasília: SBEM, 2018. Livro eletrônico.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental.* Brasília, DF: 2012.

[5] Nessa época, o Grucomat estava sob a coordenação da Professora Regina Célia Grando.

de trabalho propiciado pelas relações no Grucomat e sobre como a atividade coletiva alimenta a atividade individual; um texto discorrendo sobre o conceito de agência matemática, proposto pelo colaborador do grupo, Arthur B. Powell; um último capítulo, analítico, em que explicitamos, a partir das narrativas, o processo formativo existente no Grucomat e os indícios de processos de generalização pelos alunos, sinalizando para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No primeiro capítulo, "*Design research* como abordagem metodológica do Grucomat", Adair Mendes Nacarato, Iris Aparecida Custódio e Caio Leardini Grillo analisam como a dinâmica adotada no Grucomat se aproxima da metodologia de *design research*. Os autores apoiam-se em estudos internacionais que discutem essa modalidade de pesquisa, cujo foco é a produção de material instrucional – no caso, tarefas para a sala de aula – em parceria com professores da universidade e da escola básica.

No capítulo 2, *"Um, dois, três, vamos começar outra vez:* reflexões acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico", Juliana Bagne e Marjorie Samira Ferreira Bolognani, apresentam reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Infantil. As tarefas foram desenvolvidas com crianças entre 3 e 4 anos, em parceria com as professoras regentes das turmas, em uma creche do município de Jundiaí/SP, local de trabalho de umas das pesquisadoras. As autoras propuseram tarefas que visavam observar a percepção de regularidades, convidando as crianças a descobrir e criar padrões, brincando com o próprio corpo na composição de filas. As pesquisadoras discutem: possíveis indícios sobre a construção da percepção de regularidades; a proposta de utilizar o registro pictórico, sua importância ou não para o desenvolvimento das tarefas; e o movimento reflexivo, por elas experienciado, a respeito da trajetória realizada desde as primeiras tarefas e a partir das discussões com o grupo colaborativo.

No capítulo 3, "*Vamos passear na floresta?* possibilidade de trabalho com padrões na educação infantil a partir de uma sequência corporal", Giancarla Giovanelli de Camargo relata sua experiência ao propor uma situação-problema baseada em histórias para alunos com idades entre 4 e 5 anos de um Centro Municipal de Educação (Cemei) da cidade de Itatiba/SP, local em que a pesquisadora era diretora. A tarefa foi planejada em parceria com a professora da classe e tinha como foco propor aos alunos uma brincadeira que consistia em passear em uma floresta à procura de um tesouro. Para passarem por determinados locais, as crianças deveriam seguir algumas dicas (fotos de como as crianças deveriam se organizar) para não serem vistas pelo lobo: caverna – fotografia em que os alunos estão organizados em fila, seguindo o motivo frente/ costas; rio – fotografia em que os alunos estão organizados em fila, seguindo o motivo levantado/abaixado; e montanha – fotografia em que os alunos estão organizados em fila, com o motivo braços cruzados/ levantados/abaixados. Em sua narrativa, Giancarla destaca a potencialidade que o registro pictórico teve para algumas de suas análises e reflexões.

"Qual é o segredo? É para você o descobrir!" constitui o capítulo 4 desta obra. Nele Selma

Nascimento Vilas Boas socializa seu movimento de propor tarefas a alunos da Educação Infantil de uma escola pública de Campinas/SP na qual era diretora. A primeira proposta consistia em compor um trem que seguisse um padrão de cores. A pesquisadora apresentou vagões (confeccionados com papel *color set*), organizando-os segundo um motivo de cores, e solicitou que as crianças dissessem qual deveria ser a cor do vagão seguinte. Dando continuidade à proposta, os alunos foram desafiados a identificar o motivo em filas organizadas pela pesquisadora e, em seguida, montar novas filas, que também seguissem um motivo de repetição, para que os colegas descobrissem o segredo. Por fim, a pesquisadora propôs que os alunos desenhassem segredos para serem descobertos. E retornou ao Grucomat, para que o grupo auxiliasse nos desdobramentos de suas propostas. A partir das discussões com os pares, Selma, na escola, propôs que os alunos construíssem sequências, utilizando materiais manipulativos fornecidos por ela. Porém eles construíram padrões, e não sequências. Com a discussão com os participantes do grupo e com o pesquisador colaborador Arthur B. Powell, Selma compreendeu que havia exposto às crianças um padrão, e não uma sequência, e, por isso, quando desafiados a criar sequências repetitivas, os alunos criaram padrões. Tal conclusão conduziu Selma a reelaborar a proposta e desenvolvê-la com outro grupo de crianças. Em sua narrativa, podemos identificar a importância do diálogo com os pares do grupo, não apenas para alunos, mas também para a professora, que também estava se apropriando de novos conceitos referentes ao pensamento algébrico.

No capítulo 5, "As potencialidades das tarefas investigativas sobre padrões numéricos em um 3.º ano do ensino fundamental", Cidinéia da Costa Luvison discute o desenvolvimento das tarefas em tiras com números coloridos, com a qual objetivava que, estabelecendo relações entre a cor e a sua posição, os alunos identificassem o padrão proposto na tira e reconhecessem números pares e ímpares, compreendessem a ordem de distribuição desses números — a antecipação, a regularidade dos números — e percebessem suas diferenças e suas semelhanças. A tarefa foi desenvolvida em 2014 e 2015, com duas turmas de 3.º ano do ensino fundamental nas quais a pesquisadora era professora, em uma escola municipal de Bragança Paulista/SP. Os alunos tinham idades entre 8 e 9 anos. A autora apresenta em sua narrativa o movimento experienciado por seus alunos, ao realizarem a tarefa e ao apropriarem-se de um campo de conhecimento (a Álgebra) para o trabalho com a percepção de regularidades. Cidinéia destaca a importância das discussões no Grucomat para que ela percebesse que poderia, por meio de suas mediações, ter contribuído ainda mais para as discussões e as hipóteses levantadas por seus alunos, pois em 2014 ela estava receosa em realizar as mediações e, como ela mesma destaca, "[...] parece que me faltavam elementos para levar a discussão adiante". Novamente, a importância do diálogo entre os pares é ressaltada.

Em "Investigando padrões e generalizando: desafios aos alunos do 4.º ano", o sexto capítulo desta obra, Carla Cristiane Silva Santos apresenta sua trajetória formativa, seu ingresso no Grucomat e a forma como o grupo foi subsidiando sua iniciação na docência e o trabalho com conceitos matemáticos. Em sua narrativa, ela apresenta e discute algumas tarefas com sequências de padrões repetitivos: sequências corporais, que consistiam em montar filas com regularidades e descobrir o segredo de organização de uma fila; e elaboração, apoiada em materiais manipulativos, de fio de contas coloridas que seguisse um motivo de repetição das cores. As tarefas foram propostas a alunos de um 4.º ano do ensino fundamental, em parceria com a professora regente da turma. Neste capítulo também podemos identificar como o grupo se constitui como um “lugar de formação” que subsidia professores em início de carreira ou com vários anos de profissão.

No capítulo 7, “As estripulias de Pedrinho: trabalhando com a percepção de regularidades no 1.º e 3.º ano do Ensino Fundamental”, Kátia Gabriela Moreira apresenta em sua narrativa o movimento experienciado por alunos do 1.º ano do Ensino Fundamental, pertencentes a uma escola da rede municipal de Nazaré Paulista/SP, e de alunos de um 3.º ano de uma escola da rede municipal de Piracaia/SP. Em sua narrativa, Kátia apresenta o movimento dos alunos, ao desenvolverem duas tarefas elaboradas pelo Grucomat: “As estripulias de Pedrinho”, que visava à identificação de regularidades em uma sequência de figuras; “A sequência dos piões”, também composta por figuras; e “As estripulias de Pedrinho com suas amigas”, que dava continuidade às tarefas anteriores, mas apresentava um sequência com figuras de bonecas. Kátia tinha por objetivo verificar as potencialidades das tarefas para o desenvolvimento do pensamento algébrico das crianças. No decorrer de sua narrativa, ela traz elementos que explicitam não apenas as potencialidades das tarefas elaboradas pelo Grucomat, como também o processo de apropriação, pelas crianças, dos conceitos referentes ao pensamento algébrico e o processo do grupo, ao elaborar, propor, analisar e reelaborar tarefas. Fica clara em seu texto a importância das trocas e das discussões entre os pares, quando a autora ressalta que

> sem saber como dar continuidade à tarefa, insegura e com medo de não valorizar toda essa percepção levantada pelos alunos, nas quais via muito sentido, decidi propor que fizessem um registro do “segredo” que julgavam ser coerente com a sequência, para que no outro dia pudessem ser socializadas as hipóteses de todas as duplas. Com essa proposta, houve tempo para que trocasse ideias com Cidinéia, uma professora integrante do Grucomat, que também participou da elaboração da tarefa em questão.

No capítulo 8, “Uso de padrões: possibilidade de aprendizagem significativa para os alunos desenvolverem a capacidade de generalização”, Claudia Cristiane Bredariol Lucio apresenta em sua narrativa o movimento de alunos de 6.º ao 8.º ano de uma escola privada do interior de São Paulo nas atividades com a tarefa das carinhas, uma sequência figurativa com motivo de repetição. Os alunos foram organizados em grupos e, posteriormente, as conclusões alcançadas, socializadas com a classe. Claudia destaca em seu texto o movimento não apenas dos estudantes em relação às propostas, mas também o do Grucomat, que, após análise dos registros dos alunos e discussões coletivas, constatou a necessidade de reformular as questões que compunham a tarefa. Foi a partir do movimento em sala de aula – a mediação nos grupos e o momento de socialização das estratégias entre os diferentes grupos – que os possíveis equívocos nos enunciados das questões foram explicitados e houve a possibilidade de reformulação da tarefa.

No capítulo 9, “Alunos do 7.º ano do ensino fundamental em um movimento de (re) significação de padrões”, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos relata o trabalho realizado em 2013 com quatro turmas de seus alunos do 7.º ano, utilizando a sequência em fios de contas coloridas – também proposta por Carla. Os registros presentes na narrativa, revelam a importância do trabalho com sequências de tarefas intencionalmente elaboradas e organizadas, pois, como destacado por Jaqueline, os alunos conseguiram empregar, na proposta seguinte, conceitos elaborados na primeira tarefa. Por meio das discussões que Jaqueline faz e dos registros que apresenta, percebemos distintos níveis de generalização nas respostas apresentadas por seus alunos: calcular de conta a conta, ir contando de três em três, utilizar a subtração e os múltiplos, além de analisar o resto da divisão por três. A narrativa nos leva a refletir sobre a não linearidade do desenvolvimento do pensamento algébrico, pois, embora surjam estratégias referentes ao uso dos múltiplos de três e à análise do resto da divisão por três, alguns de seus alunos, apesar de serem de turmas de 7.º ano, ainda empregam estratégias muito similares aos alunos do 4.º ano.

No capítulo 10, “A cada nova experiência, uma nova aprendizagem”, Kelly Cristina Betereli apresenta sua experiência com algumas tarefas com regularidades em sequências propostas a alunos do 7.º e do 8.º anos de uma escola privada da cidade de Itatiba/SP. Em sua narrativa ela relata o movimento dos alunos com as tarefas, bem como seu processo, ao se apropriar do trabalho com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim como Carla e Jaqueline, Kelly também propôs a tarefa do fio de contas coloridas, porém acrescentou outras propostas que visam à percepção de regularidades e à elaboração de leis de formação. O trabalho com tarefas que permitem a investigação exige o envolvimento dos alunos, mas é de fundamental importância o papel do professor, ao mediar as discussões e organizar as hipóteses dos alunos. Assumir a mediação também faz parte do processo de formação do professor, pois é uma habilidade construída aos poucos. Em sua narrativa, Kelly revela: “[...] ao ver a videogravação, percebi que minhas intervenções, ou melhor, minhas falas, na intenção de ajudá-los, fizeram com que eles, que já estavam confusos, ficassem ainda mais perdidos”. Kelly se arriscava na primeira proposta com tarefas que visavam ao desenvolvimento do pensamento algébrico e, para ela, isso também consistia em um desafio.

No capítulo 11, “Preste atenção nesta pergunta, ela é uma pegadinha!”, Raquel Fernandes Gonçalves Machado apresenta momentos experienciados com estudantes de 8.º e de 9.º anos do Ensino Fundamental em turmas da Educação para Jovens e Adultos (EJA). Para realizar as tarefas, ela assumiu uma parceria com uma professora que atuava com esses níveis de ensino. As propostas desafiavam tanto a perceber regularidades quanto a identificar padrões nas diferentes sequências apresentadas. Em sua narrativa Raquel dá destaque ao desenvolvimento da tarefa com a tira de números coloridos. No movimento explicitado, é interessante notar que a primeira atitude tomada para realizar a proposta foi explorar os sentidos atribuídos pelos alunos à palavra “padrão”. Outro fato enfatizado pela pesquisadora foi a importância da gravação em áudio e vídeo para o retorno às discussões dos alunos.

No capítulo 12, “Tarefas sobre sequências no ensino médio: identificando regularidades e fazendo generalizações”, Rosangela Eliana Bertoldo Frare narra a experiência com tarefas sobre sequências desenvolvidas em duas turmas de 2.º ano do Ensino Médio – em fevereiro de 2015, em uma escola pública do interior do estado de São Paulo. As tarefas foram baseadas no banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) e tencionavam verificar se os alunos perceberiam relações e regularidades e fariam generalizações usando a álgebra. A partir da narrativa, observamos que os alunos percebem as regularidades propostas nas sequências apresentadas, conseguem empregar a linguagem algébrica e articular conceitos anteriormente trabalhados, para elaboração de leis de formação. Também merece realce a reflexão que Rosangela faz sobre as tarefas, identificando que os alunos perceberam relações que ela mesma não havia notado ao propor as tarefas. Ela ressalta, ainda, a importância dos momentos de socialização entre os grupos para que as estratégias sejam conhecidas, verificadas e discutidas entre os alunos. Esse recurso foi utilizado pela professora para o trabalho com o conceito de equivalência entre as diversas leis de formação.

No capítulo 13, “Práticas formativas do Grucomat: aproximações entre a abordagem *Teacher Design Research* e as narrativas de aulas como promotoras do desenvolvimento profissional do professor”, Adair Mendes Nacarato e Kátia Gabriela Moreira tecem aproximações da metodologia de trabalho do Grucomat com a *Design Research* e a *Teacher Design Research*, pelo movimento da professora Kátia do grupo para a sua sala de aula e desta para o grupo, apontando indícios de aprendizagens dos envolvidos: os alunos, os pares do grupo e ela própria. O processo analítico pauta-se na perspectiva enunciativo-discursiva e envolve a narrativa de uma aula com alunos do 1.º ano do ensino fundamental. As autoras ponderam que produzir narrativas de práticas promove o desenvolvimento profissional do professor.

No capítulo 14, “Tarefas para promover e dar suporte à agência matemática de aprendizes”, Arthur B. Powell apresenta suas concepções sobre agência matemática e tarefas estruturadas que permitem aos alunos produzir ideias matemáticas que oportunizam que os estudantes exercitem sua agência matemática. Depois de descrever a agência matemática, contrasta duas tarefas para ilustrar as características que empoderam e apresenta exemplos de tarefas sobre fração que promovem e dão suporte à agência matemática dos estudantes.

No capítulo 15, “Coletivo de trabalho como recurso para a atividade individual”, Daniela Dias dos Anjos e Rosangela Eliana Bertoldo Frare analisam o trabalho coletivo construído no Grucomat como recurso para a atividade docente individual. Os registros transcritos das reuniões e de excertos das narrativas permitem às autoras identificar o quanto os professores aprendem uns com os outros, seja assistindo aos vídeos de aulas dos colegas; produzindo, adaptando e analisando conjuntamente as tarefas desenvolvidas; ou reelaborando as propostas. Nas discussões desse capítulo é tomada como base a perspectiva histórico-cultural, mais especificamente os estudos de

Yves Clot sobre o papel do coletivo de trabalho na atividade individual. Como as próprias autoras refletem,

> a experiência vivenciada no Grucomat não se trata de uma proposta em clínica da atividade, mas se configura como um coletivo de trabalho cujos membros analisam coletivamente o que realizam, pensam juntos o trabalho. Tal atividade coletiva alimenta a atividade individual, propiciando justamente essa saúde de um coletivo que se reúne em torno de questões comuns.

Finalmente, no texto “Um olhar retrospectivo para a produção do Grucomat”, Iris Aparecida Custódio e Adair Mendes Nacarato produzem uma síntese dos resultados apontados pelas professoras em suas narrativas. Os resultados centram-se em dois eixos: o processo formativo existente no Grucomat e os indícios de processos de generalização pelos alunos, sinalizando para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nossa expectativa é que esta obra possa subsidiar discussões e reflexões sobre as práticas voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início da escolarização. Os capítulos que compõem esta coletânea refletem o momento que os participantes do grupo estavam vivenciando, imersos na dinâmica de estudar e produzir tarefas voltadas à sala de aula.

Iris Aparecida Custódio

Adair Mendes Nacarato

Organizadoras

DESIGN RESEARCH COMO ABORDAGEM METODOLÓGICA DO GRUCOMAT

Adair Mendes Nacarato
Iris Aparecida Custódio
Caio Leardini Grillo

INTRODUÇÃO

O presente capítulo refere-se às práticas de formação adotadas no Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat). Pela sua dinamicidade nesse período de sua existência, desde 2003, temos procurado definir seu papel quanto às práticas de formação nele construídas colaborativamente, buscando um enquadramento teórico. Inicialmente, no contexto das discussões sobre grupos colaborativos, consideramos que tinha uma dimensão colaborativa, pois não atendia a todas as características postas naquela época como definidoras de um grupo colaborativo (NACARATO; GRANDO; ELOY, 2009). Isso porque se trata de um grupo institucional, em que são inegáveis as relações de poder, marcadas pela histórica distinção entre acadêmicos/pesquisadores e professores da educação básica; não se enquadrava, portanto, no perfil de um grupo colaborativo, que pressupõe a não existência de hierarquias.

Numa análise posterior, identificamo-nos com os trabalhos de Cochran-Smith e Lytle (1999) e Jaworski (2008), que assumem a denominação de comunidade de investigação. Entendíamos que o nosso grupo era um grupo de investigação, pois todos ali produziam pesquisas – os professores produzem pesquisas a partir da própria prática e nós, formadoras, analisamos os movimentos de aprendizagem e desenvolvimento profissional dos professores (NACARATO; GRANDO, 2013). Desde aquele momento passamos a considerar que o grupo é uma comunidade de investigação e que a sala de aula – mais especificamente, a aula de matemática – é tomada como objeto de estudo.

Como já explicitado no capítulo de apresentação deste livro, a partir da eleição de um tema matemático para discussão, o grupo se dedica a estudos teóricos sobre ele e elabora tarefas para a sala de aula, posteriormente desenvolvidas pelos participantes do grupo em suas aulas, que são áudio ou videogravadas. Os registros dos alunos são recolhidos ou copiados, e o professor responsável pela turma produz a sua narrativa da aula. Esse material volta para o compartilhamento no grupo, e a tarefa, muitas vezes, é reformulada, seguida de reescritas. Isso nos levou a buscar compreender a metodologia de *Lesson study*, para avaliar se nossa prática formativa se aproximava dessa abordagem. Pelos estudos realizados na época, concluímos que a prática de formação existente no grupo se aproximava dessa abordagem, no que diz respeito ao desenvolvimento profissional do professor, mas dela se distanciava porque as coordenadoras[1] "se assumem como participantes do grupo e não atuam apenas como observadoras, e nosso objeto de investigação são as contribuições dos processos formativos na constituição profissional dos professores" (NACARATO; GRANDO, 2015). Passamos, então, a considerar que a análise de aulas era o processo formativo existente no grupo, considerado uma comunidade de investigação.

Nos últimos anos o Grucomat tem se debruçado sobre os estudos relativos ao pensamento algébrico. Dentre as leituras realizadas – algumas coletivamente no grupo, outras pelos mestrandos e doutorandos –, deparamo-nos com o conceito de *Design Research*[2] (DR), ao lermos a tese de Mestre (2014). A identificação foi imediata: *"é isso que o nosso grupo realiza!"*. Fizemos novas leituras teóricas para nos assegurarmos dessa aproximação.

Dessa forma, nosso objetivo neste capítulo é apresentar essa abordagem metodológica, apontando nossas aproximações com ela, mas também destacando as singularidades do nosso grupo, pois partimos do pressuposto que, mesmo nos apropriando de um referencial teórico, sempre fazemos adaptações a nossa realidade e às condições de trabalho e de investigação. Inicialmente apresentaremos a metodologia da *Design Research* e a forma como ela vem sendo por nós apropriada, com o nosso olhar para o movimento do Grucomat; finalmente, exporemos algumas reflexões de seus participantes – aqui denominados de professores-pesquisadores, visto que todos atuam em sala de aula e pesquisam suas práticas – e traremos nossas reflexões sobre o próprio processo de teorização da metodologia do grupo.

CONTEXTUALIZANDO A *DESIGN RESEARCH* NO GRUCOMAT

O conceito de *Design Research* (DR) tem sido utilizado na literatura com diferentes nomes: *Design-Based Research, Design Experiments*[3] e *Design Studies.* No presente texto não faremos distinções entre eles. Não é um conceito tão recente, embora seja ainda pouco conhecido e utilizado no contexto brasileiro.

Trata-se de um conceito que teve sua origem nas ciências da aprendizagem e vem sendo apropriado no campo educacional e por educadores matemáticos. Alguns pesquisadores brasileiros

---

[1] Na época o Grucomat era coordenado por Regina Célia Grando e Adair Mendes Nacarato.
[2] Optamos por manter a expressão em inglês, para não descaracterizar sua abordagem e por não encontrarmos uma tradução que expresse seu sentido.
[3] A literatura faz referências a experimentos. Entendemo-los como o momento de desenvolvimento da tarefa com os alunos. E é com esse significado que faremos referências a ele ao longo do texto.

traduziram como "pesquisa de desenvolvimento" (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015; MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014) e, em Portugal, optou-se por "investigação baseada em design" (PONTE *et al.*, 2016). Não é nossa intenção discutir a origem desse conceito, nem o modo como vem sendo apropriado pelos pesquisadores[4].

Essa abordagem metodológica visa à inovação em educação, rompendo com as dicotomias entre teoria e prática e é caracterizada por alguns pesquisadores como pesquisa de aplicação, visto que muitas investigações na área educacional não chegam às salas de aula.

Barab e Squire (2004 *apud* MATTA; SILVA; BOAVENTURA; 2014, p. 25) definem *Design-Based Research* (DBR) como: "Uma série de procedimentos de investigação aplicados para o desenvolvimento de teorias, artefatos e práticas pedagógicas que sejam de potencial aplicação e utilidade em processos ensino-aprendizagem existentes".

Para alguns pesquisadores, o foco está na aprendizagem dos estudantes. Tem como objetivo relacionar processos de desenvolvimento e também momentos de pesquisa. De uma maneira geral, o *design* está atrelado ao desenvolvimento de soluções para problemas reais, de maneira organizada, criativa e coerente com uma linha de pensamento. Por outro lado, o termo *research* nos remete ao procedimento de pesquisa com regras estabelecidas e padrões atrelados à validação de resultados. Portanto, o DR tem a ambição de combinar essas ideias e promover novas experiências educacionais de descobertas e aprendizado.

Molina, Castro e Castro (2007) colocam as duas abordagens mutuamente dependentes. O desenvolvimento das situações serve como contexto para pesquisas, e estas são analisadas continuamente, fornecendo informações que podem melhorar o *design.* A adequação progressiva do objeto de estudo é uma característica importante dessa metodologia.

Esse movimento pode ser aplicado na área da educação, com a intenção de produzir um conhecimento apoiado na prática e em todas as evidências encontradas no decorrer do processo. É notório que se enquadra no propósito da educação interacionista, pois o movimento cíclico do DR favorece discussões, análises e socializações, tanto entre professores quanto entre alunos.

Os ambientes em que se aplica o DR são bem variados. Um grupo de investigadores pode trabalhar diretamente com os alunos; um grupo de investigadores e um grupo de formadores podem trabalhar com professores que depois atingirão os alunos de várias escolas (COBB*;* GRAVEMEIJER, 2008). Assim, as informações do desenvolvimento de uma tarefa podem indicar novos caminhos ou novas abordagens ao professor ou instrutor para o processo de ensino-aprendizagem. Resumindo num ciclo: Elaboração – desenvolvimento[5] em sala – análise dos registros – adequação ou reelaboração. Outro exemplo seria entre os próprios alunos, que, ao realizar uma tarefa, podem utilizar as informações de outras resoluções para guiar seu raciocínio ou generalizar pensamentos,

[4] Ver os textos de: Barbosa e Oliveira (2015); Matta, Silva, Boaventura (2014); Ponte *et al*. (2016); e Powell e Ali (2018).

[5] Estamos optando por utilizar a palavra "desenvolvimento", embora a literatura aponte "aplicação".

enquadrando-se no seguinte ciclo: desenvolver – testar e aplicar – definir teorias. No caso do Grucomat, professores e pesquisadores atuam no grupo e diretamente com os alunos.

Powell e Ali (2018), baseando-se numa revisão de literatura, apresentam cinco características que são comuns às pesquisas de DR. Apresentamo-las, estabelecendo relações com a metodologia de trabalho do Grucomat:

1) DR é intervencionista: visa criar novas formas de estudo e instrução e tem intenção metodológica; portanto, tem influência positiva nas ações dos sujeitos. As práticas de sala de aula dos pesquisadores do Grucomat têm explicitamente o caráter intervencionista, a partir da intencionalidade pedagógica do professor. Ao estudarmos uma temática, já elaboramos tarefas que possam se alinhar às perspectivas teóricas estudadas, e nessa fase de elaboração, na maioria das vezes, já planejamos possíveis intervenções com os alunos.

2) DR é uma teoria generativa: ela gera teorias sobre os processos de aprendizagem e como dar suporte a eles. A teoria, tomada como ponto de partida, nos dá suporte para elaborar a tarefa, mas é no contexto de sala de aula, com os discursos dos alunos, que vamos construindo nossas abordagens teóricas sobre as aprendizagens com a temática em foco. Os discursos dos alunos por meio de seus registros escritos ou orais (gravados pelos professores-pesquisadores) é que possibilitam essa construção teórica.

3) DR é prospectiva e reflexiva: ela assume dupla função, ou seja, "A teoria informa prospectivamente o *design* para o experimento de *design* e é desenvolvida em reflexão retrospectiva sobre os desvios entre os processos de ensino e de aprendizagem esperados e observados" (POWELL; ALI, 2018, p. 224, grifos nossos). Quando os professores-pesquisadores retornam com os seus registros das tarefas desenvolvidas – o experimento, na perspectiva dessa teoria –, os participantes do grupo podem refletir sobre o seu sucesso ou não, sobre as lacunas existentes (muitas vezes, tais lacunas estão na linguagem utilizada nos comandos das tarefas) e, ao mesmo tempo, pensar novas elaborações para a tarefa. Assim, uma mesma tarefa passa por muitas reescritas.

4) A DR é iterativa e ecologicamente válida. A DR é desenvolvida em ciclos iterativos de invenção e revisão, em que as conjecturas são refinadas durante o experimento do *design*. Esse refinamento ocorre em ciclos de micro e macro *design.* Os micros ocorrem dentro do próprio experimento, quando os pesquisadores buscam adaptar as atividades instrucionais e as teorias a elas subjacentes. Cada ciclo micro pressupõe a antecipação analítica de uma atividade instrucional, levando à adaptação ou à revisão de atividades subsequentes. Os ciclos de macro *design* ocorrem quando os experimentos são repetidos, tomando como referência os anteriores. Assim, o conhecimento é adquirido nas várias iterações e na análise retrospectiva. Ele é validado nesse movimento mais amplo, tendo a sala de aula como referência. Muitas vezes, no próprio desenvolvimento da tarefa em sala de aula, o professor já identifica seus problemas. Assim, quando ele retorna com o material para o grupo, um primeiro refinamento já foi feito. Os pares

discutem esses registros, bem como a avaliação do professor-pesquisador, e reescritas das tarefas são conduzidas. Essas novas elaborações retornam à sala de aula de outro professor-pesquisador do grupo, e o ciclo se repete, até chegar o momento em que julgamos que a tarefa está adequada e é, portanto, validada, com a especificação do nível de ensino a que ela se destina. Essa tarefa passa a compor o banco de tarefas do Grucomat.

5) A DR é orientada para a prática: esta é a origem da DR, ser uma pesquisa aplicacionista e intencional.

Como a pesquisa está situada em ambientes escolares reais, as condições do estudo já representam a complexidade das condições de prática. Portanto, o cuidado deve ser que os relatórios de pesquisa descrevam essas condições e como elas podem ter influenciado o processo de aprendizagem. Além disso, as teorias estão intimamente ligadas às atividades de alunos e professores e testadas localmente e revisadas repetidamente. (POWELL; ALI, 2018, p. 225)

No Grucomat esse é o momento de síntese das pesquisas realizadas sobre a temática. É quando seus participantes analisam os dados produzidos e diferentes pesquisas emergem: tanto dos professores-pesquisadores da escola básica, que produzem seus textos para periódicos, eventos ou capítulos de livros, quanto dos professores-pesquisadores da universidade, que vinculam essas pesquisas aos projetos que desenvolvem no Programa de Pós-Graduação em Educação. Até o momento, todos os projetos desenvolvidos no Grucomat foram publicados em forma de livro ou *e-book*, com textos de todos os participantes. Essas publicações são voltadas aos professores da educação básica em seus diferentes níveis de ensino e sempre trazem – como nesta coletânea – os resultados com estudantes em salas de aula reais, produzidos no movimento dialético entre teoria e prática.

Matta, Silva e Boaventura (2014, p. 26) apresentam mais uma característica da DR (ou DBR – Design-Based Research, como eles a denominam): a colaboração. Eles entendem que há vários graus de colaboração:

> O desenvolvimento e a busca por uma aplicação que seja solução concreta para problemas dados obrigam à colaboração de todos os envolvidos: investigador, comunidade e pessoas que se relacionam. A ideia da DBR é considerar todos como parte da equipe de pesquisa. Uma forte recomendação é que o problema seja definido de forma compartilhada com aqueles que sofrem as mazelas daquela dificuldade, e assim a pesquisa será sempre validada por todos os envolvidos.

A colaboração é a marca do Grucomat desde a sua criação. Embora seja um grupo institucional, com hierarquias estabelecidas, há um entrosamento entre os participantes, de forma que cada um colabora de acordo com sua disponibilidade ou seu conhecimento. No grupo não temos cronograma a cumprir, nem prazos estabelecidos para encerramento de uma pesquisa. Quando esta é vinculada a um projeto com financiamento externo, há a preocupação no cumprimento de prazos; no entanto, como no caso da pesquisa sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico (Projeto

Universal-CNPq), após o término do projeto o grupo permaneceu mais dois anos analisando e refinando as tarefas, o que culminou na publicação do *e-book*: *O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática* (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018).

Essa existência contínua do grupo permite que limitações apontadas para a DR sejam minimizadas. Por exemplo, Ponte *et al.* (2016, p. 87), dentre as limitações e dificuldades, apontam:

> Para realizar uma IBD [Investigação Baseada em Design], com vários ciclos, são necessários vários anos de conceptualização, design, experimentação, análise de dados, nova conceptualização e assim por diante. Isto é muito difícil de enquadrar nas restrições temporais de um trabalho num doutoramento e ainda mais num mestrado.

Afirmar que nos aproximamos da DR, mas fazemos as adaptações no nosso grupo, significa que a revisão na literatura – que é bastante vasta – aponta que há muitas nuances para essa abordagem metodológica. Geralmente, ela é realizada em projetos com prazos delimitados ou envolve professores da escola que são convidados para o projeto, porém, não observamos, nesses estudos, o movimento que existe no Grucomat. Alguns pesquisadores complementam a pesquisa com entrevistas, grupos focais ou outros procedimentos de produção de dados.

Percebemos aproximações com o grupo de Barbosa e Oliveira (2015), que utilizou a pesquisa de desenvolvimento no Programa Observatório da Educação (Obeduc/Capes), num grupo constituído por pesquisadores da universidade e da escola básica, envolvido na produção de materiais instrucionais para subsidiar o trabalho dos professores que ensinam matemática. Segundo os autores, um dos resultados esperados da DR "é a disponibilização do produto para uma população mais ampla do que aquela envolvida na sua geração. Por isso, esta modalidade possui uma vocação para a mudança educacional, o empoderamento, o compartilhamento e a reusabilidade" (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 530-531). De forma similar, todas as produções do Grucomat, além de contribuírem para o próprio desenvolvimento profissional dos envolvidos, são disponibilizadas para uma população mais ampla de professores que ensinam matemática.

Na próxima seção apresentaremos algumas reflexões dos participantes do Grucomat com relação à metodologia por nós adotada.

CARACTERÍSTICAS DA METODOLOGIA DE TRABALHO DO GRUCOMAT NAS VOZES DOS PROFESSORES: APROXIMAÇÕES COM A *DESIGN RESEARCH*

A importância da metodologia de trabalho instituída pelo Grucomat é explícita nas narrativas que compõem essa coletânea; por isso, nesta seção dedicamo-nos a apresentar nossa metodologia a partir das vozes dos professores-pesquisadores.

As práticas de sala de aula dos pesquisadores do Grucomat, pautadas e constituídas intencionalmente, têm explicitamente o caráter intervencionista, já que trabalhamos concomitantemente com estudos de uma temática, elaboração de tarefas – que possam se alinhar às perspectivas teóricas estudadas – e desenvolvimento delas em sala de aula.

Na narrativa de Raquel há um excerto em que ela explicita esse movimento do Grucomat:

> *Nessas reuniões, os integrantes do grupo realizam leituras de pesquisas, escrevem textos diversos e refletem sobre seu lugar na Matemática escolar, especialmente nos anos iniciais. No momento em que passei a fazer parte do grupo, o foco estava voltado às possibilidades de construção do raciocínio algébrico.*
>
> *Buscávamos encontrar, no contexto de generalização de propriedades dos números e das operações, potencialidades para o desenvolvimento desse raciocínio. Para isso, as leituras se intercalavam com as pesquisas, as análises e as adequações de tarefas investigativas que poderiam favorecer a percepção e a generalização de padrões em sequências. A análise das possibilidades de algumas tarefas já inspirava, em cada componente do grupo de estudos, questionamentos sobre o envolvimento dos alunos diante desses desafios. (Narrativa de Raquel)*

Rosangela destaca em sua narrativa os quesitos para que o trabalho do professor em sala de aula possa ser de fato intervencionista:

> *Destaco também que nesse processo de mediação é indispensável que o professor faça boas perguntas, com a finalidade de ajudar os alunos a avançarem. As problematizações possibilitaram que eles refletissem sobre algo antes não pensado e fizessem relações a fim de dar uma resposta. Esse movimento, além de desencadear o pensamento algébrico, permitiu a produção de sentido e até mesmo a elaboração conceitual.*
>
> *Saliento que a natureza das tarefas propostas possibilitou que os alunos realizassem generalizações, consideradas por Vale (2013) essenciais para o conhecimento matemático e basilares para o pensamento algébrico, por favorecerem a transição do pensamento numérico para o algébrico. (Narrativa de Rosangela)*

Não basta que o grupo se empenhe nos estudos, nas discussões, na elaboração e organização intencional de tarefas, pois os resultados que serão obtidos dependem do papel do professor em sala de aula.

Por outro lado, nosso ponto de partida é sempre a teoria. Ela nos dá suporte para a elaboração das tarefas e a reflexão sobre elas. No entanto, é no contexto de sala de aula, a partir da dialogicidade emergente dos discursos dos alunos e deles com o professor, que temos suporte para construir nossas abordagens teóricas sobre as aprendizagens na temática estudada. Os discursos dos alunos, seus registros escritos ou orais (gravados pelos professores-pesquisadores) é que possibilitam essa construção teórica.

A professora Cidinéia explicita em sua narrativa a importância da dialogicidade entre professor e aluno e entre professores, no Grucomat:

> *Essa trajetória de convicções, possibilidades e transformação me fez perceber que*

> *a aprendizagem se faz nessa dialogicidade entre professor e aluno e, ao mesmo tempo, entre professores nos grupos colaborativos, como o Grucomat. A participação no grupo me possibilitou repensar e discutir minha prática enquanto professora, o que ocorreu enquanto escrevia minha narrativa e compartilhava esta e as videogravações e enquanto analisava todo esse percurso com a tarefa das fitas. Tal oportunidade me fez acreditar ainda mais na importância dessa troca com docentes que enxergam a amplitude dos caminhos da Matemática, vendo-a como uma disciplina que proporciona reflexões, discussões e muito aprendizado. (Narrativa de Cidinéia)*

Para Cidinéia, a dialogicidade emergente na sala de aula e os discursos dos alunos possibilitam as trocas no grupo, o que ocorre por meio do compartilhamento de práticas via escrita de narrativas de aula e socialização de vídeos e registros de alunos. Para ela, a escrita das narrativas se tornou um instrumento para repensar e discutir sobre a prática docente.

A construção teórica pode ser identificada também no excerto da narrativa de Juliana e Marjorie:

> *No caso de nossa tarefa, constatamos que o desenho não foi determinante para observarmos o desenvolvimento da percepção de regularidades pelas crianças. Uma estratégia para entendermos o pensamento das crianças sobre o assunto, suas construções ou as dúvidas que permaneceram para elas após o desenvolvimento da proposta é a roda de conversa. Esta pode oportunizar às crianças a narração oral do que desenharam. (Narrativa de Juliana e Marjorie)*

Para elas a roda de conversa com as crianças, viabilizando a narração oral, é o meio para se ter acesso à compreensão delas a respeito da percepção de regularidades. Essa construção teórica somente foi possível no contexto da sala de aula.

Na narrativa de Kelly também encontramos evidências da importância do contexto de sala de aula para seu desenvolvimento profissional. Refletindo sobre a prática, por meio da videogravação de sua aula, ela repensa a aprendizagem de seus alunos e as suas próprias:

> *A prática docente exige muito mais que isso, exige uma articulação entre os saberes provenientes da formação profissional e os experienciais. Como já indicado, essa foi a minha primeira experiência com uma aula videogravada e com o tema "sequências e padrões". No final, gostei do resultado; os alunos também ficaram satisfeitos, conseguiram entender a proposta e chegar às soluções. Notei a motivação deles quando terminaram a primeira atividade proposta e me cobraram a continuação daquela que não havia dado certo. Essa atividade fez com que eu olhasse para as aprendizagens dos alunos e também para minha própria. Voltei-me para meu próprio desenvolvimento profissional e vi que estou sempre aprendendo com meus próprios alunos, com a visualização de minha aula videogravada, com minha própria experiência. (Narrativa de Kelly)*

Suas reflexões a conduzem a uma construção teórica sobre a formação e o desenvolvimento profissional, assim como sobre o processo de ensino e de aprendizagem.

Um movimento muito interessante e específico do Grucomat é o retorno dos professores-pesquisadores com registros das tarefas desenvolvidas – discursos dos alunos, suas produções, vídeo e audiogravações das aulas, narrativas de práticas. Esse processo possibilita que os demais participantes do grupo reflitam sobre o sucesso ou não da proposta, as possíveis lacunas e, ao mesmo tempo, pensem novas elaborações para a tarefa. Muitas vezes, no próprio desenvolvimento da tarefa em sala de aula, o professor já percebe alguns problemas, ou seja, já faz um primeiro refinamento. A discussão com os pares conduz novas reescritas das tarefas, e essas novas elaborações retornam à sala de aula, repetindo-se o ciclo, até chegar o momento em que julgamos a tarefa finalizada.

Em sua narrativa, Claudia explicita o movimento do grupo na elaboração, reelaboração e desenvolvimento da tarefa em sala de aula: *"No grupo, a partir de meus depoimentos e das dúvidas que os alunos tiveram diante das questões por nós formuladas, constatamos a necessidade de reformular o enunciado das perguntas para atingir os objetivos daquela tarefa*.

A professora Kátia destaca em sua narrativa o diálogo com os pares do grupo:

> *Com essa proposta, houve tempo para que trocasse ideias com Cidinéia, uma professora integrante do Grucomat, que também participou da elaboração da tarefa em questão. Minha hipótese era a de que não havíamos garantido a repetição do motivo necessária à sua identificação por parte das crianças. Juntas, pensamos que os desenhos poderiam estar influenciando a busca por várias características e, talvez, fosse necessário proceder a uma troca dessas imagens ou mesmo à reformulação do enunciado, deixando claro que o foco deveria recair sobre as ações realizadas pelas figuras das fotos. Mas a atividade já estava em andamento e isso não foi possível. (Narrativa de Kátia)*

Nesse excerto fica explícito o movimento colaborativo existente no grupo. Os professores não apenas estudam e elaboram tarefas conjuntamente, mas discutem seus desdobramentos, os possíveis equívocos. O grupo se torna um lugar de acolhimento, reflexão, discussão e ressignificação de práticas.

O processo de análise e reflexão dos resultados também é explicitado por Giancarla. Para ela, esse movimento propiciado pelo diálogo com os pares e por meio da escrita da narrativa viabiliza seu desenvolvimento profissional e dos demais docentes da escola em que atua:

> *A experiência da tarefa foi rica, porém mais rico ainda foi o processo de análise e discussão e também a pausa para a escrita deste texto. É esse processo de análise, discussão e reflexão que proporciona o aprimoramento de minha ação na escola como gestora. Apesar de não atuar em sala de aula, tenho subsídios para orientar, sugerir, questionar... levar à reflexão! Nesse movimento, posso oportunizar também o desenvolvimento profissional dos docentes da escola onde atuo. (Narrativa de Giancarla)*

Tais questões também são levantadas por Selma, que destaca a importância do planejamento coletivo, da intencionalidade pedagógica e a avaliação dos resultados:

Finalizando, ressalto alguns pontos importantes para o desenvolvimento de atividades. Um deles é planejamento, em grupo, de uma sequência de tarefas com intencionalidade pedagógica. Outro é a realização de tarefas como a aqui relatada com as crianças. Também se destaca a avaliação dos resultados com todos os integrantes do Grucomat e a visita do professor Arthur. Tais pontos foram significativos, em primeiro lugar, para minha formação e, em segundo, para a aprendizagem das crianças. (Narrativa de Selma)

Por fim, destacamos que a pesquisa desenvolvida pelo Grucomat é orientada para a prática. A fala de Kátia explicita essa concepção, já que suas angústias, seus medos e decisões são de uma professora que está inserida em um contexto de sala de aula real:

Sem saber como dar continuidade à tarefa, insegura e com medo de não valorizar toda essa percepção levantada pelos alunos, nas quais via muito sentido, decidi propor que fizessem um registro do "segredo" que julgavam ser coerente com a sequência, para que no outro dia pudessem ser socializadas as hipóteses de todas as duplas. (Narrativa de Kátia)

Os excertos dessas narrativas revelam as aproximações da metodologia do grupo com a DR, mesmo que essa abordagem ainda não tivesse sido discutida anteriormente no grupo. Esta é nossa primeira discussão sobre ela.

UMA PRÁTICA QUE ANTECEDEU À SUA TEORIZAÇÃO

Na introdução deste texto explicitamos que a intencionalidade de teorizar a metodologia do grupo já existia, antes mesmo de conhecermos a DR. Este texto foi o último a ser produzido para esta coletânea, visto que ainda não havíamos nos apropriado da teoria relativa à DR – e ainda estamos no caminho de apropriação. No entanto, as vozes dos professores-pesquisadores aqui mencionadas evidenciam a coerência da nossa metodologia e suas aproximações com a DR.

Além das narrativas que compõem esta coletânea, os professores também foram solicitados, em meados de 2018, a produzir uma narrativa sobre suas experiências no Grucomat, quando sentimos a necessidade de ter um capítulo sobre a metodologia do grupo.

A professora-pesquisadora Juliana assim narrou:

A dinâmica de estudos do Grucomat é claramente definida num movimento de ação-reflexão-ação: diante do estudo e da análise inicial de tarefas significativas o grupo de professores-pesquisadores chega a certos consensos quanto aos caminhos que serão percorridos pelos alunos até a resolução das problematizações propostas. Com essas ideias iniciais, os professores-pesquisadores levam as propostas para a sala de aula, observam e registram os caminhos percorridos pelos alunos. De volta ao Grucomat os professores-pesquisadores debruçam-se sobre as produções dos alunos e analisam primeiramente o envolvimento deles diante da proposta; se fez sentido e/ou se houve conexão com os conhecimentos prévios que eles *traziam. Por fim, a partir dos dados coletados arriscam-se a analisar o processo de resolução das problematizações que os alunos adotaram para determinada tarefa e se houve deslocamentos nas aprendizagens dos alunos. (Narrativa de Juliana)*

Em sua fala, há indícios de como o grupo tem contribuído para a formação de seus professores e para constituição de práticas diferenciadas para o ensino de matemática na Educação Infantil, visto que a professora-pesquisadora atua nesse nível de ensino. Juliana também reconhece a existência de um ambiente de aprendizagem no grupo:

> *Este ambiente de aprendizagem convida à formulação de hipóteses e oportuniza a reflexão sobre os conhecimentos já construídos, uma vez que, diante da análise do grupo a respeito das ações e envolvimento dos alunos em relação às tarefas, estas podem ser amplamente reorganizadas ou até mesmo substituídas. Nesse movimento de "pensar juntos", todos se dão conta de que possuem boas ideias para contribuírem sobre o conceito independentemente do nível em que atuam ou da formação que possuem. Considerar o aluno como protagonista de suas aprendizagens, reconhecendo suas ações e respostas às propostas, convida-me diariamente a revisitar minha decisão de aprender com eles, de modificar pontos de vista e desprender-me das certezas fincadas em minha prática. Acredito que, ao ouvi-los, ganho pistas de como os alunos desejam ser ensinados, o que torna as aulas mais prazerosas e envolventes. Esse movimento também evidencia as formas de pensar dos alunos, possibilitando que o professor planeje situações que possam contribuir para os avanços necessários na aprendizagem. (Narrativa de Juliana, grifos da autora)*

Constatamos, assim, que o foco é a aprendizagem do aluno, mas, nesse movimento, os professores também aprendem. E como!

Nessa perspectiva, Kátia também traz em sua narrativa o seu processo de aprendizagem, a partir do outro – dos pares do grupo e dos alunos –, evidenciando que a colaboração como elemento da DR e a produção de narrativas constituem importantes práticas de formação:

> *O movimento de elaborar as tarefas, discuti-las, levá-las para sala de aula e novamente refletirmos acerca de seus desdobramentos, foi fundamental para o nosso amadurecimento enquanto professores-pesquisadores, bem como nos possibilitou um aprofundamento teórico no que diz respeito às possibilidades de trabalho com o desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula. [...] Além do apoio e do "feedback" possibilitado pelo grupo, entrar em contato com as narrativas dos outros professores, independentemente do nível em que atuavam, foi fundamental para o meu aprofundamento teórico. Assim como, elaborávamos propostas em que a participação e o envolvimento dos alunos eram fundamentais para que os mesmos fossem engajados no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico por meio das trocas e do diálogo. O grupo partia do princípio de que, assim como os alunos, quando os professores se sentem seguros, participam, trocam ideias, tomam iniciativas, aprendem com o outro e são coautores da construção do conhecimento uns dos outros. (Narrativa de Kátia)*

Caio foi o último a integrar o grupo e, em sua narrativa, explicita como foi se apropriando das práticas nele existente:

Os encontros sempre foram muito produtivos e as discussões sobre as potencialidades de cada tarefa norteavam as nossas ideias e, aos poucos, construímos algumas sequências que tinham por objetivo desenvolver o pensamento algébrico. Várias vezes nos deparamos com a reescrita de enunciados ou adequação dos itens das questões para ser coerente com os autores, mesmo como pesquisadores. Colocávamo-nos no lugar do professor e também do próprio aluno no momento da realização da atividade. Esse é um dos exercícios que deve ser comum aos professores para propor tarefas efetivas aos alunos e também preparar para possíveis questionamentos. A aplicação das tarefas, com muito trabalho em grupo, pede a interação e intervenção do professor, por isso pensávamos sempre nos possíveis questionamentos que o professor poderia fazer aos alunos e também no que os mesmos poderiam perguntar. Uma das partes mais ricas do projeto todo é poder colocar as tarefas em práticas e aplicá-las em sala de aula. Alguns professores do grupo tiveram a oportunidade de aplicar as tarefas e eu pude acompanhar alguns desses momentos. É muito interessante observar que as questões norteadoras do professor têm papel fundamental, por isso, é importante o planejamento inicial e intencionalidade na aplicação. Outro fato que aparece na prática são as observações dos alunos. A vivência de cada um e a interação no ambiente da classe trazem muitos comentários e estratégias diferenciadas inclusive das previstas em reunião do grupo. Percebemos também que alguns detalhes e adequações só são percebidos na prática, quando colocamos as tarefas em ação. (Narrativa de Caio)

A narrativa de Caio traz a importância do papel dos alunos nesse processo; é a partir de suas vozes, que emanam durante a realização e a discussão das tarefas, que podemos analisar suas potencialidades. Essa constatação também se faz presente na narrativa de Iris:

O mais importante é que a resposta dos alunos, sua receptividade, interpretação dos enunciados, seus registros é que conduziam nosso trabalho. Em várias tarefas, precisamos reelaborar os enunciados que eram duplamente interpretados pelos alunos. O que me fez pensar o quão difícil é para o professor elaborar suas próprias tarefas para as aulas. (Narrativa de Iris)

Mas é também a partir dessas vozes dos alunos que vamos construindo nossos conhecimentos sobre uma prática para se ensinar matemática, conforme narrado pela professora-pesquisadora Rosângela, que atua no Ensino Médio:

Aprendi que no processo de desenvolvimento das tarefas sobre álgebra com os alunos a mediação do professor é indispensável, e que, se não forem feitas boas perguntas, ela pode não proporcionar o avanço dos alunos. Como em qualquer movimento de resolução de problemas, o trabalho com o pensamento algébrico também requer a socialização das respostas apresentadas pelos alunos. Como professora de Matemática, eu vinha presenciando a dificuldade dos alunos no entendimento da álgebra e utilizando-me de estratégias nem um pouco possibilitadoras do desenvolvimento do pensamento algébrico, e o movimento com o qual me deparei no grupo contribuiu para que eu começasse a promover mudanças no modo de abordagem de tal área do conhecimento matemático. Aprendi também que o professor precisa estar preparado para propiciar condições para que os alunos avancem nos modos de organizar seu pensamento algébrico, para lidar com situações não previstas e para ouvir as ideias dos alunos a fim de compreender os diferentes modos

> *como resolvem a tarefa proposta. (Narrativa de Rosangela)*

Uma das características das aulas dos professores-pesquisadores do Grucomat é a prática problematizadora. Formular boas perguntas não é tarefa simples. No entanto, quando o professor pode compartilhar suas práticas com outros colegas, uns aprendem com os outros como problematizar em sala de aula. E isso se revela quando os participantes analisam vídeos de aulas dos colegas e/ou as narrativas escritas sobre as tarefas desenvolvidas com os alunos.

Em todas as narrativas produzidas – seja nas que constituem esta coletânea, seja nas produzidas para este texto – há implicitamente a valorização de um modelo de formação continuada de professores. Em duas narrativas esse modelo foi destacado explicitamente:

> *Olhar para o desenvolvimento do pensamento algébrico contribuiu não somente para minha prática enquanto professora, mas também para a modificação do meu olhar enquanto pesquisadora. Sem dúvidas meu olhar para o ensino de Matemática é hoje muito diferente de quando entrei em uma sala de aula pela primeira vez e devo muito às relações estabelecidas no grupo. Não acredito em maneira mais eficiente de contribuir para a formação continuada de um professor, a não ser partindo do compartilhamento de experiências, dúvidas, aprendizagens mútuas. A formação nesta perspectiva é co-construída, pois não existe um formador, mas diferentes profissionais, com diversas formações, experiências e tempo de carreira compartilhando e construindo conhecimento em parceria. (Narrativa de Iris)*

> *As formações oferecidas pela rede são formações que pouco contribuem para uma postura crítica e de criação do professor, elas seguem um caráter mais tradicional e funcionam de maneira arbitrária. No entanto, só acredito na formação continuada do professor quando este se sente mobilizado, quando a formação faz sentido à sua prática pedagógica. Para isso, há que se pensar em uma formação que promova o aprofundamento teórico e, não menos importante, o diálogo, a troca. Nós, professores, temos muito a dizer sobre a sala de aula, assim como temos muito a aprender nos livros e com nossos pares. Acredito que a proposta do Grucomat se enquadra exatamente nessa formação com sentido, pois é desenvolvida com base em princípios fundamentais como o diálogo, a troca, a reflexão e a construção. (Narrativa de Kátia)*

As vozes dos participantes do Grucomat reforçam nossa concepção de que há caminhos possíveis para a formação continuada de professores, pautada no movimento dialético entre teoria e prática, o que pode ser possibilitado pela DR, marcada pela colaboração. Além disso, como apontam Powell e Ali (2018), a metodologia de DR possibilita a pesquisa com prática, e não a pesquisa sobre prática e, no trabalho colaborativo, todos desenvolvem teorias que apoiam o desenvolvimento matemático de alunos e, diríamos, de professores.

Os professores do grupo foram se tornando pesquisadores quando assumiram o registro de suas aulas como condição para a discussão no grupo. Evidentemente, nem todas as aulas podem ser vídeo ou audiogravadas, até pelas condições de trabalho dos professores. No entanto, mesmo que essa prática de registro seja esporádica, ela é potencializadora da reflexão dos professores e também dos pares no grupo.

Finalmente, importa aqui afirmar que não acreditamos na organização de um grupo para realizar um trabalho conjunto ou uma pesquisa de mestrado ou doutorado, já partindo de uma teoria preestabelecida – seja de grupo colaborativo, seja de DR – pois é a partir do respeito, do prazer em estar juntos para estudar, refletir e investigar as práticas que se instaura uma metodologia de trabalho que pode ser teorizada. Por ora, a abordagem metodológica aqui descrita parece dar conta de teorizar as práticas do Grucomat. E a DR associada à perspectiva da *Teacher Design Research* (TDR), na perspectiva de Bannan-Ritland (2008), como discutido no capítulo 13 desta coletânea,[6] é potencializadora do desenvolvimento profissional do professor.

REFERÊNCIAS

BANNAN-RITLAND, Brenda. Teacher design research: An emerging paradigm for teachers' professional development. *In*: KELLY, Anthony E.; LESH, Richard A.; BAEK, John Y. (ed.). *Handbook of design research methods in education.* New York: Routledge, 2008. p. 246-262.

BARBOSA, Jonei Cerqueira; OLIVEIRA, Andreia Maria Pereira. Por que a pesquisa de desenvolvimento na Educação Matemática? *Perspectivas em Educação Matemática*, Campo Grande, MS, v. 8, Número temático, p. 526-546, 2015.

COBB, Paul; GRAVEMEIJER, Koeno. Experimenting to support and understand learning processes. *In*: KELLY, Anthony E.; LESH, Richard A.; BAEK, John Y. (ed.). *Handbook of design research methods in education.* New York: Routledge, 2008. p. 68-95.

MATTA, Alfredo Eurico Rodrigues; SILVA, Francisca de Paula Santos da; BOAVENTURA, Edivaldo Machado. *Design-Based Research* ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. *Revista da FAEEBA- Educação e Contemporaneidade*, Salvador, v. 23, n. 42, p. 23-36, jul./dez. 2014. Disponível em: file:///C:/Users/adamn/Downloads/1025-2428-1-SM%20 (1).pdf. Acesso em: 01 mar. 2019.

MESTRE, Célia Maria Martins Vitorino. *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade:* uma experiência de ensino. 2014. 380p. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, Portugal, 2014.

MOLINA, Marta; CASTRO, Encarnación; CASTRO, Enrique. Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences,* v. 2, n. 4, p. 435-440, 2007. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/547/1/MolinaM07-2864.PDF. Acesso em: 05 jun. 2018.

NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida. *O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica:* compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. 1. ed. Brasília: SBEM, 2018. Livro eletrônico. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf Acesso em: 23 fev. 2019.

NACARATO, Adair M.; GRANDO, Regina C. Aprendizagens docentes numa comunidade de investigação:

[6] *Práticas formativas do Grucomat: aproximações entre a abordagem Teacher Design Research e as narrativas de aulas como promotoras do desenvolvimento profissional do professor*, de Adair Mendes Nacarato e Kátia Gabriela Moreira.

a aula de matemática como objeto de estudo *In*: CONGRESO IBEROAMERIANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2013, Montevideu. *Anais*... Montevideu: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 2013. p.1-8.

NACARATO, Adair M.; GRANDO, Regina C. A análise de aulas videogravadas como prática de formação de professores que ensinam matemática. *In*: POWELL, Arthur. *Métodos de pesquisas em Educação Matemática:* usando escrita, vídeo e internet. 1. ed. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015. v.1, p. 61-94.

NACARATO, Adair M.; GRANDO, Regina Célia; ELOY, Thiago. A. Processos formativos: compartilhando aprendizagens em geometria com diferentes mídias *In*: FIORENTINI, Dario; GRANDO, Regina C.; MISKULIN, Rosana G. S. *Práticas de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática.* 1. ed. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009. v.1, p. 189-210.

PONTE, João Pedro da *et al*. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, Lisboa, Portugal, v. XXV, n. 2, p. 77-98, 2016.

POWELL, Arthur; ALI, Kendell V. Design Research in mathematics Education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, José Francisco *et al*. (org.). *Programa de pós-graduação em educação científica e tecnológica (PPGECT)*: contribuições para pesquisa e ensino. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. p. 221-242.

UM, DOIS, TRÊS, VAMOS COMEÇAR OUTRA VEZ: REFLEXÕES ACERCA DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Juliana Bagne
Marjorie Samira Ferreira Bolognani

Neste texto, refletiremos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico na educação infantil, especialmente nos grupos de crianças que possuem 3 e 4 anos. Também fará parte desta narrativa o percurso que o Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat)[1] construiu desde o planejamento e a organização das propostas investigadas neste estudo até a discussão sobre o envolvimento das crianças após o trabalho em sala de aula, além de serem expostos possíveis indícios sobre a construção da percepção de regularidades por nós entendidas como a base do pensamento algébrico.

A questão que guiou este trabalho foi: "de que modo os registros das ações adotadas no grupo colaborativo e desenvolvidas com as crianças indicam formas de continuar as práticas que desenvolvem a percepção de regularidades?". Para responder a essa questão, debruçamo-nos sobre a trajetória de construção das primeiras tarefas, readequações realizadas com o desenvolvimento das tarefas em sala de aula e análise dessas tarefas com o grupo colaborativo a partir dos vídeos, dos registros realizados pelas pesquisadoras e das produções das crianças.

INTRODUÇÃO

Antes de iniciar as reflexões sobre as sequências de tarefas que visam desenvolver a percepção de regularidades em crianças de 3 e 4 anos, faz-se necessário rever rapidamente os passos dados pelo Grupo Colaborativo de Matemática em 2012. Nesse ano, o grupo iniciou suas reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de diferentes níveis de ensino. Ao nos debruçarmos sobre os materiais já produzidos acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico — nosso foco de estudo —, muitas dúvidas apareceram, o que nos impulsionou a conhecer outros materiais e pesquisas. Ao passo que construíamos conhecimento da literatura,

[1] O Grucomat é formado por profissionais da área da educação que atuam nos diferentes segmentos (Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) e em diferentes funções. Esses profissionais trabalham como professores (pedagogos, matemáticos e formadores de professores), coordenadores e diretores educacionais.

começávamos também a “rabiscar” algumas ideias, inicialmente para o Ensino Médio e para os anos finais do Ensino Fundamental, depois para os anos iniciais do Ensino Fundamental e, por fim, para a Educação Infantil.

Dedicar-nos-emos, neste texto, às experiências e às propostas desenvolvidas pelo Grucomat para as crianças de 3 a 6 anos. Pensar sobre o trabalho na Educação Infantil configurou-se como um grande nó em nossos encontros, visto que apenas quatro integrantes eram pedagogas ─ três atuando como gestoras em escolas de Educação Infantil e apenas uma lecionando em sala de aula ─ e os demais eram graduados em Matemática. Os “achismos” eram muitos, e as divergências de opiniões ─ ou a falta delas ─ deixavam-nos inseguros. Com isso, optamos por criar sequências e observar a atuação das crianças diante de nossas ideias para avaliar o que seria necessário rever e o que se configurava como boas estratégias de aprendizagem para as crianças. Há que se considerar que não há em nosso país a tradição do ensino da chamada ‘pré-álgebra’; no entanto, os atuais documentos curriculares sinalizam para a importância da inserção de atividades voltadas ao pensamento algébrico, desde o 1.º ano do ensino fundamental. Diante disso, sentimo-nos mobilizadas para pensar em práticas anteriores com atividades voltadas à percepção de regularidades e padrões, ainda na educação infantil, que possam subsidiar o trabalho posterior no 1.º ano. Nesse contexto, inserem-se as tarefas iniciais descritas a seguir.

Diante deste quadro apresentaremos nesta narrativa, a partir da questão anunciada, o movimento reflexivo das pesquisadoras a respeito da trajetória realizada desde as primeiras tarefas e reflexões a partir das discussões com o grupo colaborativo. Finalizaremos o texto com novos apontamentos dando continuidade aos estudos.

TAREFAS INICIAIS

Uma creche do município de Jundiaí, local de trabalho da primeira pesquisadora, foi escolhida para iniciarmos a pesquisa. A escola atende 142 crianças de 4 meses a 4 anos, que permanecem na instituição em período integral. O grupo selecionado foi o G 3 (que possui crianças entre 3 e 4 anos). A escolha do grupo foi realizada tendo em vista que as crianças já possuem a oralidade bem desenvolvida, o que ajudaria também na exposição de ideias quando houvesse a concretização da proposta selecionada.

A primeira proposta, feita no segundo semestre de 2012, sugeria observar a percepção de regularidades por meio de uma tarefa que convidava as crianças a descobrirem padrões brincando com o próprio corpo. A proposta era a seguinte (Quadro 1):

Quadro 1 − Ideias iniciais do Grucomat

- Propor ao grupo de crianças a formação de filas com diferentes propostas de formação.
- É importante analisar o envolvimento das crianças durante a tarefa para identificar o interesse do grupo.
- As filas podem ser construídas todas no mesmo dia ou em diferentes momentos da rotina do grupo.
- As crianças são dispostas da seguinte maneira em uma fila:
- 1.ª proposta: uma criança em pé e outra abaixada;
- 2.ª proposta: uma menina em pé e um menino sentado;
- 3.ª proposta: uma criança sentada, uma em pé e uma ajoelhada.
-
- Na primeira:
-
- O professor pergunta ao restante da turma:
- Como continuar a fila?
- Quem sabe o segredo da fila?
-
- O professor chama uma criança e, antes de pedir para que entre na fila, pergunta-lhe:
- Como você ficaria ao entrar na fila?
-
- O docente, no caso da segunda fila (uma menina em pé e um menino sentado), pergunta:
- Quem pode entrar na fila? Por que?

Fonte: Elaborado pelo Grucomat

A partir dessa sequência realizamos um plano para o desenvolvimento da tarefa na escola. É válido lembrar que ─ embora tivéssemos certo contato com as crianças, pois a tarefa foi realizada na escola da primeira autora deste texto ─ não havia um vínculo afetivo, visto que esta era a coordenadora pedagógica. Portanto, nesse primeiro momento optamos por pedir a colaboração das professoras para a realização de tal tarefa. O plano da proposta ficou como apresentado no Quadro 2:

Quadro 2 − Planejamento da tarefa

No solário do refeitório, colocar as crianças sentadas e pedir que observem o que faremos.
Sem dizer nada, organizar a fila intercalando as crianças ─ ora sentadas, ora em pé. Realizar o motivo três vezes. Iniciar o quarto e pedir para alguma criança entrar na fila da maneira que quiser.
Chamar o restante das crianças para que se posicione da forma que desejar.
Brincar mais duas vezes com a mesma sequência.
Não realizar intervenção nesse momento.
Anotar todos os posicionamentos das crianças.
Tirar fotos.
Ao voltar para a sala, realizar roda de conversa e questionar as crianças sobre o porquê de elas se colocaram em pé ou se sentarem.
Observar se alguma criança conseguiu enxergar o motivo.
Não falar sobre "acertos" e "erros".
Anotar as respostas das crianças.
Retomar a brincadeira no dia seguinte.
Seguir os mesmos passos.
Deixar que as crianças brinquem mais duas vezes. Deixá-las livres para resolverem a organização da fila.
Tirar fotos e anotar as conversas das crianças. Realizar nova roda de conversa e ver se algo mudou.
Perguntar (ou evidenciar, caso tenha sido abordado pelas crianças) qual é o segredo da fila.
Anotar as respostas das crianças. Sugerir, após a roda de conversa, dependendo da evolução da brincadeira, que as crianças registrem com desenhos a brincadeira que realizamos.

Fonte: elaborado pelas autoras com o Grucomat

Em continuidade ao planejamento, combinamos previamente com as professoras de dois grupos de crianças na faixa etária de 3 e 4 anos de idade que nos dias 21 e 23 de novembro de 2012 acompanharíamos o desenvolvimento da proposta. No dia 21, trabalhamos com 30 crianças, pois julgamos que, para fazer o "motivo" – uma criança em pé e uma sentada –, necessitaríamos de um número maior de crianças, a fim de que elas conseguissem observar uma regularidade na fila.

A professora iniciou a montagem da sequência com 6 crianças e chamou-as aleatoriamente, uma a uma, para entrarem na fila e descobrirem o "segredo", referindo-se à posição que deveriam assumir. Pudemos observar que, ao continuarem a sequência, os alunos perceberam que estavam dispostos "um em pé e um sentado". Outra observação foi que a sequência se manteve nas 10 primeiras crianças, porém, do meio para o final da fila, notamos que, ainda que elas entrassem "corretamente", algum tempo depois se "desorganizavam" para brincar com os colegas.

No segundo momento, ao convidarmos as crianças a criarem a própria fila com um "segredo" diferente, elas construíram novamente o "segredo": um aluno em pé e um sentado. A partir do meio da fila, as crianças já se sentiam impacientes por permanecerem na mesma posição e começavam a "desorganizar" a fila, sendo que, no final desta, elas criaram um novo segredo. Isso, no entanto, só foi visto por nós no estudo das fotos, após a realização da tarefa.

Em seguida, voltamos para a sala de referência do grupo, sentamos em roda e analisamos com as crianças todas as fotos tiradas durante o desenvolvimento da tarefa. Elas conseguiram visualizar com facilidade quando não estavam na posição "correta". Foi nessa etapa da proposta que tivemos a possibilidade de enxergar o "novo segredo" que haviam criado (dois estudantes em pé, dois sentados).

No dia 23 de novembro de 2012, desenvolvemos a proposta de tarefa com apenas uma sala, com um total de 15 crianças. Relembramos e repetimos a sequência proposta dois dias antes com as crianças, e elas logo lembraram a posição que haviam ficado (um aluno em pé e um sentado). Ao convidá-los para organizarem-se em fila novamente, demos a liberdade de os/as primeiros/as aluno/as ficarem da forma que quisessem (levantados ou sentados), os demais seguiriam a sequência. No Quadro 3 transcrevemos a conversa que se deu no momento em que estávamos observando a fila com os alunos e avaliando se havia algo que poderia ser modificado ou se todas as crianças concordavam com a forma como estavam posicionadas.

Quadro 3 – Transcrição da primeira parte do vídeo no grupo 3 B

Pesquisadora: Olha agora um para o outro e vê se está tudo certo ou se vocês querem mudar alguma coisa?
Crianças: Está tudo certo!
Professora: Tem alguma coisa que precisa mudar nessa fila?
Orlando: Tem o Léo.
Professora: O que tem o Léo, Orlando?
Orlando: Ele está em pé.

Orlando: Sentado.
Professora: O Junior [como ele era conhecido, pois seu nome é Orlando Junior] falou que o Léo está de pé e que ele tem que ficar sentado. O Junior está certo ou não? Ó! O Junior está de pé, o Léo tem que ficar como?
Gabriely: O Léo tem que ficar sentado.
Professora: Então, vamos mudar, Léo? Você pode ficar sentado?
Léo: Eu não quero!
Professora: Você não quer ficar sentado?
Pesquisadora: Tudo bem se o Léo não quiser sentar?
Gabriely: O Junior pode ficar sentado.
Pesquisadora: Ju [Junior], você pode ficar sentado?
[Ele balança a cabeça afirmativamente]
Professora – No lugar onde ele está?
[Junior afirma novamente com a cabeça]
Professora: Então, pode sentar Junior. Vamos ver agora, então... Agora deu tudo certo?
Crianças: Está!
Professora: Não precisa mudar mais nada? Está tudo certo? O Junior está certo assim?
Orlando (Junior): Sim.
Gabriely: A Vitória está sentada.
Professora: Está certo assim? A fila é assim mesmo?
Pesquisadora: Ju [Orlando Junior], está bom desse jeito? Ficou certinho você e o Léo?
[Orlando balança a cabeça positivamente]
Pesquisadora: Então, está ótimo! Parabéns!

Fonte: transcrito pelas autoras a partir do desenvolvimento da tarefa em 23 nov. 2012, na sala de referência do grupo 3 B (15 crianças)

Após esse momento, as crianças foram convidadas a sentarem no tatame, e lançamos um novo segredo: dois levantados, dois ajoelhados (Quadro 4).

Quadro 4 − Transcrição da segunda parte do vídeo no grupo 3 B

Pesquisadora: Como é esse mistério?
Henrique: Ajoelhado, ajoelhado, de pé, de pé.
Pesquisadora: Olha! O Henrique acha que o mistério é assim: ajoelhado, ajoelhado, em pé, em pé.
Gabriely: Acho que é uma surpresa!
Pesquisadora: Você acha que é uma surpresa? Qual, Gaby?
Gabriely: Não sei...
Pesquisadora: Quem acha que é um mistério igual ao que o Henrique falou? Ajoelhado, ajoelhado, em pé, em pé.
Leonardo: Eu.
Pesquisadora e professora: Você acha, Léo?
Pesquisadora: A Flávia também acha! Ela ergueu a mãozinha.
[Flavia confirma com a cabeça]
Orlando: Ajoelhado, ajoelhado, ajoelhado, pé, pé, pé.
Professora: O Junior falou "Ajoelhado, ajoelhado, ajoelhado, pé, pé, pé". Agora vamos sentar no tatame, porque já desmanchou o segredo.

[Muitas crianças estavam deitadas no chão ou se locomovendo com os joelhos...]

Fonte: transcrito pelas autoras a partir do desenvolvimento da tarefa em 23 nov. 2012, na sala de referência do grupo 3 B (15 crianças)

Notamos que as crianças estavam cansadas de permanecer no mesmo lugar e já começaram a dispersar. Deixamos essa proposta de lado e convidamos as crianças a desenharem sobre a brincadeira do segredo (um levantado e um sentado). Pedimos às crianças que sentassem nas mesinhas no solário da sala e distribuímos folhas e canetinhas para que, com seus desenhos, mostrassem para os/as outros/as colegas professores/as (do Grucomat) como eles/as tinham descoberto o segredo (Quadro 5).

Quadro 5 − Transcrição da terceira parte do vídeo no grupo 3 B

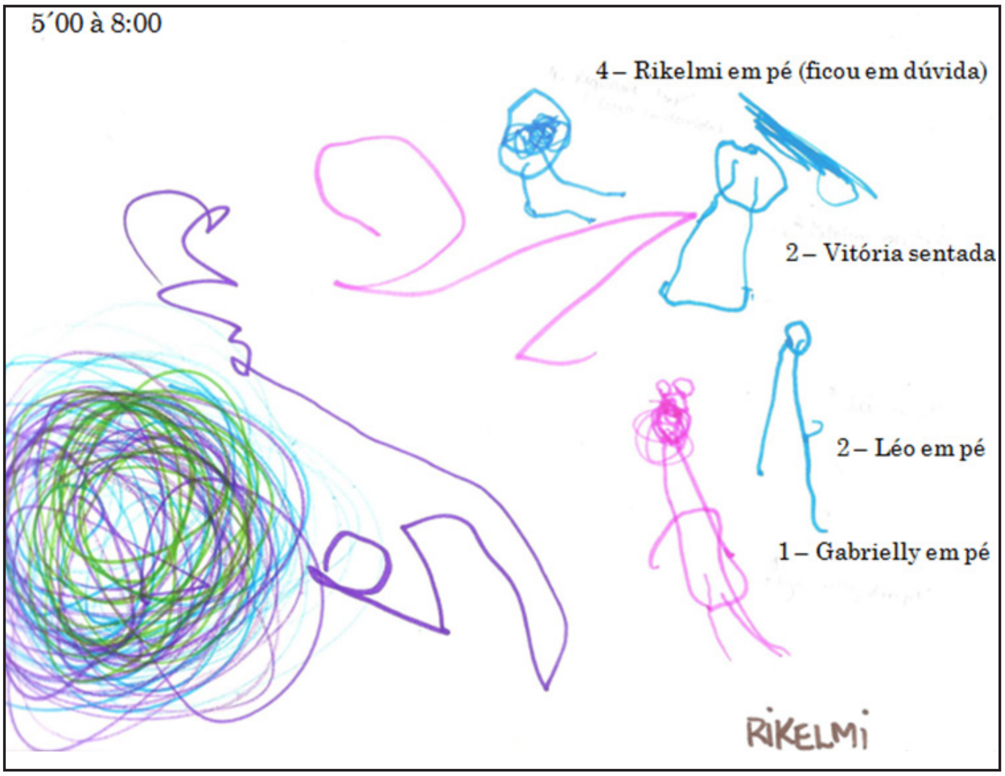
Pesquisadora: Orlando o que você está desenhando?
Orlando: Um bicho.
Pesquisadora: Qual bicho?
Orlando: Um mosquito.
Alyssom: Eu estou desenhando Power Ranger.
Pesquisadora: Deixa eu ver?
Pesquisadora: E você, Benício?
Benício: Um carro.
Pesquisadora: Você desenhou Gaby? O que você desenhou?
Gabriely: A gente aqui...
Pesquisadora: Vocês? E como vocês ficaram na fila?
Gabriely: Um em pé, um sentado.
Pesquisadora: Legal, Gaby.
[A professora faz um gesto para que eu visse novamente o desenho do Benício]
Pesquisadora: Deixa eu ver o do Benício. O que é isso?
Benício: O Henrique...
Pesquisadora: O que o Henrique está fazendo?
Benício: Está de joelho.
Pesquisadora: E depois do Henrique de joelho?
Benício: O Léo.
Pesquisadora: Como o Léo estava?
Benício: Em pé.
[Em seu desenho, Benício coloca o Leonardo na frente dele e não atrás, como na fila que construíram]
Pesquisadora: Continue desenhando que já volto aqui de novo... Fer, o que você desenhou?
Fernando: O mistério.
Pesquisadora: E como é o mistério?
Fernando: Sentado e de joelho.
Pesquisadora: Sentado e de joelho? E esse desenho que você fez é sentado e de joelho?
Fernando: De joelho.
Pesquisadora: E o próximo?
[Fernando parou de falar e continuou desenhando]
Pesquisadora: Flávia e você? Como você desenhou? Explica para mim?
Flávia: O mistério.
Pesquisadora – Como está desenhado o mistério aí? Você está sentada ou em pé?
Flavia: Sentada.
Pesquisadora: E o próximo amigo? Está como?
Flávia: Em pé.
Pesquisadora: Joia!
Pesquisadora: E você, Henrique, desenhou?
Henrique: Sim.
Pesquisadora: Como você desenhou?
Henrique: Um em pé e um sentado.
Pesquisadora: Legal! Você pode continuar desenhando! Eu vou agora lá na mesa do Léo! Léo, você já desenhou o segredo?

Fonte: transcrito pelas autoras a partir do desenvolvimento da tarefa em 23 nov. 2012, na sala de referência do grupo 3 B (15 crianças[2])
Nota: As crianças desenhavam o segredo que mais gostaram enquanto as falas eram gravadas.

[2] As crianças desenhavam o segredo que mais gostaram enquanto as falas eram gravadas

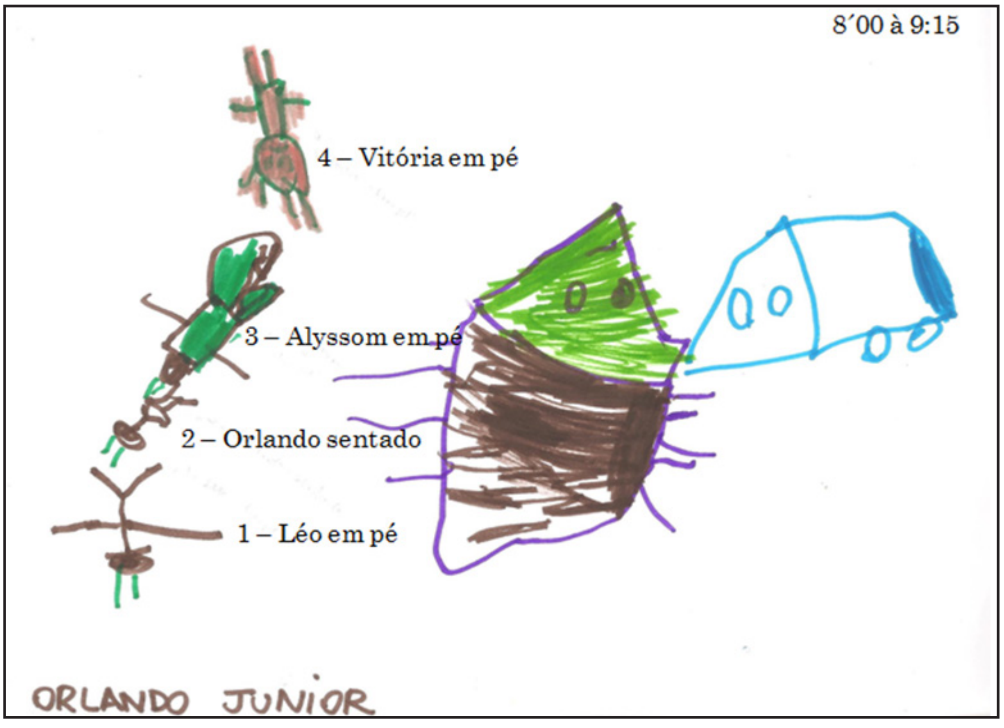
Apresentaremos a seguir duas imagens que foram analisadas pelo grupo colaborativo. O primeiro desenho foi realizado pelo aluno Riquelmi (Figura 1) e o segundo pelo aluno Orlando Junior (Figura 2).

Figura 1 − Desenho do aluno Riquelmi sobre o segredo que mais gostou



Fonte: Fotografado pelas autoras

Figura 2 − Desenho do aluno Orlando sobre o segredo que mais gostou



Fonte: Fotografado pelas autoras

Até aqui apresentamos os três momentos das tarefas planejadas nos encontros do grupo colaborativo. O primeiro se refere ao desenvolvimento da tarefa, cuja proposta foi a formação de uma fila pelos alunos, que, ao utilizarem o próprio corpo, criaram um padrão — um em pé e um sentado. Em um segundo momento, dando continuidade à proposta, os alunos foram convidados a formar uma nova fila e criar um novo "segredo". O terceiro momento é composto pela brincadeira da fila na sala, seguida pelo registro, feito por meio dos desenhos dos alunos. Propomo-nos, na próxima seção, a narrar as reflexões realizadas nos encontros com o grupo colaborativo.

REFLEXÕES A PARTIR DAS DISCUSSÕES COM O GRUPO COLABORATIVO

Após esses dois dias de trabalho com as crianças, reunimos os materiais para mostrarmos aos colegas do Grucomat, a fim de, juntos, analisarmos o que havia dado certo e o que precisava de uma nova reorganização e de definirmos os próximos passos a serem dados. No dia 26 de novembro de 2012 apresentamos os materiais ao grupo colaborativo, o que gerou reflexões sobre o envolvimento das crianças diante da proposta apresentada e, consequentemente, das ações dos pesquisadores do grupo, no que tange à construção dessa sequência. A partir da análise do vídeo e da discussão que se seguiu, chegamos ao pressuposto inicial de que — diante da quantidade de crianças (cerca de 25 crianças), do tempo (cerca de 40 minutos) e do espaço em que se encontravam (ambiente externo utilizado para brincadeiras e propostas de Educação Física) — é possível que as crianças tenham perdido a referência do "segredo" e, por isso, passaram a desenvolver um novo motivo de repetição.

Após rever o registro da tarefa, também levantamos novas hipóteses com relação ao envolvimento das crianças diante da proposta. De maneira geral, as crianças formam fila na escola para se deslocarem pelo espaço e para esperar a vez e não para "brincar em fila". Conforme os primeiros alunos se posicionavam na fila, os demais observavam o padrão — um estudante em pé e um sentado — e conseguiam seguir a fila de acordo com o sugerido. No contexto dessa tarefa, a brincadeira era a fila; e o fato de as crianças não conhecerem o objetivo de se colocarem "um atrás do outro" criou certa ansiedade nelas, o que culminou na "desorganização" dos primeiros integrantes da fila.

Tal situação nos leva a pensar se podemos caracterizar a proposta descrita acima como uma brincadeira. Isso porque, quando nos referimos à brincadeira, concordamos com estudiosos do brincar (BROUGÈRE, 2000; KISHIMOTO, 2000; WINNICOTT, 1982) que apontam ser esta uma importante prática no centro do processo de desenvolvimento infantil onde a criança pode criar e recriar situações simbólicas à medida que organiza estruturalmente seus conhecimentos a respeito do mundo, seus sentimentos, numa relação prazerosa, ética e saudável com o meio social e cultural. Portanto, compreendemos que a brincadeira parte do princípio de desenvolver o imaginário da criança com prazer, situação que essa “brincadeira em fila” não promoveu.

A fala de uma das pesquisadoras do grupo legitima a análise realizada a pouco: “*as crianças não viram sentido na tarefa, não tiveram bons motivos para resolver o problema que colocamos*”. Na ocasião, foi sugerido que, se apresentássemos às crianças uma história virtual com uma boa situação problematizadora, possivelmente as crianças se envolveriam na resolução desta, e a tarefa teria um resultado diferente.

A análise dos desenhos foi feita a partir do registro do próprio desenho, da transcrição dos vídeos, do diário de campo da pesquisadora e das imagens do vídeo. Após observar os desenhos e rever a transcrição dos vídeos, observamos que as crianças não ilustraram, necessariamente, a ordem ou a disposição “correta” das crianças na fila. Elas utilizaram os espaços da folha e não se preocuparam com a ordem em que os fatos relatados aconteceram. Além disso, dentre as propostas de tarefas apresentadas às crianças, o que elas mais representaram em seus desenhos foi a sequência “levantado e sentado”. Com a leitura de Forman et al. (1999), chegamos à conclusão de que as crianças desenharam sobre o que sabem e não necessariamente sobre o que vivenciaram na brincadeira, revelando o ato de desenhar mais como a simbolização do vivenciado do que como uma representação da tarefa.

Acreditamos que aumentar o tamanho do papel, conforme sugestão feita durante o encontro do Grucomat, no segundo semestre de 2014, não provocaria maior aprendizagem do tema, mas sim ofereceria boas problematizações para as crianças resolverem, as faria “desenhar suas posições, ideias e teorias atuais” (FORMAN et al., 1999, p. 239). Tais problematizações, conforme Bagne e Nacarato (2012, p. 187), pressupõem “a circulação de significações no trabalho com os alunos, o que implica interações entre diferentes atores (alunos entre si e alunos com a professora), diálogo, troca de ideias, trabalho compartilhado e mediações realizadas pela professora”.

Outra hipótese levantada pelos pesquisadores do Grucomat nos momentos de análise e reflexão sobre a proposta desenvolvida é a de que o desenho como registro não atende ao objetivo esperado para a proposta de padrões com repetição com alunos na faixa etária entre 3 e 4 anos, visto que as crianças nessa idade não sentem necessidade de comunicar o desenho fora do contexto da tarefa. Essa reflexão também foi colocada em pauta por Arthur Powell, pesquisador colaborativo externo do Grucomat, ao tratar da presente pesquisa.

Na ocasião de sua visita ao grupo, junho de 2015, o Prof. Arthur nos provocou com a seguinte colocação: “*todas as tarefas desenvolvidas com os alunos necessitam de algo concreto para comprovar a aprendizagem dos alunos?*”. Ele também convidou o grupo a retomar os objetivos da tarefa, a fim de verificar se eles foram cumpridos e se a proposta do desenho é determinante para alcançá-los. No caso de nossa tarefa, constatamos que o desenho não foi determinante para observarmos o desenvolvimento da percepção de regularidades pelas crianças. Uma estratégia para entendermos o pensamento das crianças sobre o assunto, suas construções ou as dúvidas que permaneceram para elas após o desenvolvimento da proposta é a roda de conversa. Esta pode oportunizar às crianças a narração oral do que desenharam.

Acreditamos que esta narrativa aponta para a continuidade das reflexões acerca da estruturação do pensamento algébrico, tendo em vista que o foco da análise aqui estabelecida é composto pelos registros do percurso traçado e pelas ações adotadas no grupo colaborativo e posteriormente desenvolvidas com as crianças. Isso porque a escrita nos possibilita avaliar, em uma visão "retrospectiva" (NÓVOA, 2010, p. 168), nosso percurso e "desenvolver uma reflexividade crítica face a saberes em evolução permanente" (PASSEGGI; SOUZA 2010, p.11).

Pensamos que a dificuldade por nós encontrada está, como afirma Radford (2013, p.8), em nossas escolhas "de determinantes sensíveis no terreno Fenomenológico". Segundo o autor, "estas dificuldades resultam das várias possibilidades que oferece a percepção dos termos dados" (p. 8). No caso da tarefa proposta, a pergunta elaborada não contribuiu para que os alunos se atentassem para o que estava sendo solicitado: a posição de cada um na fila. Talvez a questão poderia ter sido: "Como ficará o próximo ao entrar na fila, em pé ou sentado?". Essa questão estaria mediando a observação das crianças e, talvez, possibilitando que elas tivessem a percepção dos elementos componentes da sequência.

REFERÊNCIAS

BAGNE, Juliana; NACARATO, Adair Mendes. A prática do diálogo em sala de aula: uma condição para a elaboração conceitual matemática dos alunos. *Revista Reflexão e Ação*, Santa Cruz do Sul, v. 20, n 2, p. 186-214, jul.-dez, 2012.

BROUGÈRE, Gilles. *Brinquedo e cultura*. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2000. 110p. (Coleção Questões da Nossa Época, v.43)

FORMAN, George et al. A cidade na neve – aplicação da abordagem multissimbólica em Massachusetts. In: EDWARDS, C.; GANDINI, L.; FORMAN, George (Org.). *As cem linguagens da criança*: a abordagem de Reggio Emília na educação da primeira infância. Tradução Dayse Batista. Porto Alegre: Artmed, 1999. p. 235- 251.

NÓVOA, António. A formação tem que passar por aqui: as histórias de vida no Projeto Prosalus. In: NÓVOA, A.; FINGER, M. (Org.). *O método (auto)biográfico e a formação*. Natal: EDUFRN; São Paulo: Paulus, 2010. p.158-187.

PASSEGGI, Maria da Conceição; SOUZA, Elizeu Clementino. O método (auto)biográfico: pesquisa e formação. In: NÓVOA, António; FINGER, Matthias (Org.). *O método (auto)biográfico e a formação*. Natal: EDUFRN; São Paulo: Paulus, 2010. p.11-14.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, L. et al. (Ed.). *Investigación en didáctico de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Comares, 2013. p. 3-12.

VAMOS PASSEAR NA FLORESTA? POSSIBILIDADE DE TRABALHO COM PADRÕES NA EDUCAÇÃO INFANTIL A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA CORPORAL

Giancarla Giovanelli de Camargo

INTRODUÇÃO

Iniciei minha participação no Grucomat (Grupo Colaborativo de Matemática) no ano de 2012, justamente quando o grupo iniciou estudos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos diferentes níveis de ensino1. O grupo é aberto à participação de todos que gostam da Educação Matemática ou buscam aperfeiçoar e enriquecer a prática nesse campo. O objetivo é ser uma comunidade de aprendizagens e de investigações compartilhadas. Esse propósito vai ao encontro das discussões sobre formação docente, que nos últimos anos se tornaram frequentes, tanto no meio acadêmico quanto no político-educacional.

Particularmente, acredito que é no compartilhamento de práticas, articuladas com a teoria, que o conhecimento e o desenvolvimento profissional são produzidos, a partir dos estudos, da análise das práticas, das críticas construtivas e da reflexão individual e coletiva. A combinação entre a teoria e a prática, por meio da investigação e da reflexão, permite embasar e aperfeiçoar o trabalho do professor, proporcionando-lhe vivências e estudos que não estiveram presentes na formação inicial. Além disso, essa ação-investigação-estudo-reflexão compartilhada faz sentido para o professor, permitindo uma ruptura com a experiência de ensino que teve enquanto aluno.

Essa perspectiva, que espero ver mais nos espaços formativos, fundamenta-se em Cochran-Smith e Lytle (1999). As autoras propõem o conhecimento da prática. Nessa concepção, não há uma divisão entre conhecimento prático e teórico, a prática e a teoria são discutidas, articuladas e refletidas em grupos constituídos por interesses comuns de desenvolvimento profissional e aperfeiçoamento da prática. As autoras afirmam:

> [...] esta concepção não pode ser entendida como um universo de conhecimento que divide conhecimento formal de um lado e conhecimento prático de outro. Presume-se, ao invés disso, que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem é gerado quando consideram tanto suas próprias salas de aula como locais para uma investigação

[1] O Grucomat é formado por profissionais dos diversos segmentos de ensino — professoras da Educação Infantil e Ensino Fundamental, diretores e coordenadores de escola e professores de Matemática que atuam no Ensino Fundamental, no Médio e no Superior.

intencional quanto o conhecimento e a teoria produzidos por outros como material gerador para questionamento e interpretação. Nesse sentido, os professores aprendem quando geram conhecimento no local "de" prática, atuando dentro do contexto de comunidades de investigação, teorizando e construindo seu trabalho de forma a conectá-lo às questões sociais, culturais e políticas mais gerais[2]. (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 2, tradução minha)

No início dos estudos sobre a construção do pensamento algébrico, o grupo se debruçou sobre materiais já produzidos. Em seguida, iniciou-se uma ampla discussão sobre tarefas a serem desenvolvidas nos diferentes segmentos de ensino ─ Ensino Médio, Fundamental II, Fundamental I e Educação Infantil. Tais tarefas seriam colocadas em prática, depois socializadas no grupo para serem aperfeiçoadas e só então compartilhadas mais amplamente.

Já nas primeiras discussões busquei refletir sobre minha prática e a da escola em que sou diretora. Questionei-me: quais tarefas sobre o pensamento algébrico e sobre os padrões já realizávamos? De imediato, lembrei-me de duas clássicas: a sequência de bandeirinhas de festa junina e a do colar de índio confeccionado com macarrão colorido. A primeira delas realizamos até hoje, geralmente todos os anos. Já a segunda deixamos de fazer há um tempo, devido à ampla discussão sobre a pertinência da comemoração do Dia do Índio nas escolas, realizada quase sempre de forma simplista e alegórica. Conforme as reflexões se ampliavam, fui percebendo que em outros momentos realizávamos outras tarefas, como a formação da fila e da roda seguindo algum critério.

Mas tanto as tarefas da bandeirinha e do colar quanto as de formação da fila e da roda eram realizadas sem um conhecimento matemático mais específico e, principalmente, sem questionamentos que colocassem a criança em movimento de reflexão e, portanto, de aprendizagem. Isso ficou muito claro quando, no grupo, debatemos que apenas seguir a sequência não significa perceber o padrão e as regularidades. E muitas vezes, quando realizamos uma atividade de sequência e percebemos que a criança continuou corretamente, não a questionamos. Dessa forma, não temos a certeza de que a criança percebeu o padrão[3].

Enquanto pensávamos sobre tarefas para a Educação Infantil, em determinado momento, em 2013, surgiu a ideia de partirmos de uma situação-problema baseada em histórias, já que a criança dessa faixa etária tem um grande interesse por brincadeiras, histórias e fantasias, visto que o jogo é a tarefa principal para a criança. Essa ideia agradou-me muito, já que acredito nessa proposta. Ademais, na época atuava também como formadora de professores de Educação Infantil da rede municipal de Itatiba e trabalhava com a sequência de tarefas da tese de doutorado *A Medida e a Criança Pré-Escolar* da professora doutora Anna Regina Lanner de Moura, na qual propõe tarefas ou jogos de medir. Ressalto que algumas dessas atividades partem de histórias.

---

[2] "[…] this third conception cannot be understood in terms of a universe of knowledge that divides formal knowledge, on the one hand, from practical knowledge, on the other. Rather, it is assumed that knowledge teachers need to teach well is generated when teachers treat their own classrooms and schools as sites for intentional investigations at the same time that they treat the knowledge and theory produced by others as generative material for interrogation an interpretation. In the sense, teachers learn when they generate local knowledge of practice by working within the contexts of inquiry communities to theorize an construct their work and to connect in to larger social, cultural, and political issues".
[3] Padrão é o termo que se repete na sequência. Por exemplo, em ABABABAB o padrão é AB.

Segundo a pesquisadora, a finalidade dessa etapa de ensino deve consistir não em acelerar, mas sim em ampliar o desenvolvimento infantil (LANNER DE MOURA, 1995, p. 5-6). Dessa forma, despertar a imaginação, partindo de uma história com o objetivo de trabalhar a constituição do pensamento algébrico, vai ao encontro do propósito da Educação Infantil.

Além disso, segundo essa pesquisadora, a imaginação "é a base de toda tarefa criadora, aquela que possibilita a criação artística, cientifica e técnica" (LANNER DE MOURA, 1995, p.22). Nesse contexto, considerei que o ideal era partir de uma história com uma situação-problema para motivar e envolver as crianças e, consequentemente, possibilitar a aprendizagem.

A tarefa que na época escolhi foi uma de duas elaboradas a partir de histórias. Devo ressaltar que uma de nossas colegas do Grucomat já havia aplicado e discutido no grupo a mesma tarefa, não tendo alcançado resultados esperados. Esse fato me levou a planejar a concretização da atividade com a professora da sala com um cuidado maior, já que inferíamos o porquê de a tarefa não ter tido resultados tão satisfatórios com nossa colega.

NA FLORESTA TEM LOBO?

A tarefa foi realizada em um Cemei (Centro Municipal de Educação) da cidade de Itatiba, local de trabalho desta pesquisadora, por alunos da 1ª fase C, do período da tarde. Os alunos tinham entre 4 e 5 anos e eram da sala da professora L.K. A sala foi selecionada devido ao interesse inicial da professora em participar e realizar a tarefa. A professora é efetiva da rede há pelo menos 15 anos, tendo atuado também em outras salas de Educação Infantil — com estudantes de 0 a 3 anos — e em salas do Ensino Fundamental I.

A tarefa foi planejada em parceria com a professora da classe. Relatei a ela as mencionadas dificuldades da colega do Grucomat; com isso, ao planejarmos a tarefa, tivemos a ideia de tornar a situação mais real. A proposta desenvolvida no Grucomat e aplicada foi a destacada no Quadro 1:

Quadro 1 – Descrição da Tarefa

Com as crianças organizadas em círculo, apresentar a proposta explorando o momento para despertar o interesse e a curiosidade. O professor pode explicar que será realizada uma brincadeira, em que irão passear na floresta para procurar um tesouro. Nesse momento, algumas questões podem ser feitas: "O que tem em uma floresta? O que podemos encontrar lá?".

Levar as crianças a dizerem "árvores, rio, animais". Se não, falarem "lobo" questionar.

Em seguida, afirmar que uma fada muito boa deixou um envelope com algumas dicas para elas conseguirem passear pela floresta, sem serem vistas pelo lobo, e pegarem o tesouro.

As dicas são fotos de como as crianças devem se organizar para passar por alguns lugares da floresta: caverna (frente ou costas), rio (levantadas ou abaixadas) e montanha (braços cruzados ou levantados ou abaixados).

Fonte: Acervo do Grucomat

Ao realizarmos, pesquisadora e professora da sala, o planejamento em conjunto, tivemos a ideia de utilizar alguns tecidos que já existiam na escola como cenário. A caverna foi feita com tecidos TNT marrom, preto e azul, esticados e amarrados no guarda-corpo do pátio, bem em cima da rampa de acesso a este; dessa forma, as crianças teriam que passar por baixo do tecido. Para o rio, utilizamos o TNT azul esticado no chão. Para a floresta, optamos pelo TNT verde, também esticado no chão. Como tesouro, deixamos no final do pátio uma latinha com chocolate *Bis* dentro.

Esses elementos foram pensados para tornar a atividade mais atraente e lúdica, de forma a levar os alunos a entrarem na história e participarem da tarefa de forma mais efetiva. Afinal, conforme assinala Leontiev (2010), o brincar é a atividade principal da criança. Ele esclarece:

> Chamamos de atividade principal aquela em conexão com a qual ocorrem as mais importantes mudanças no desenvolvimento psíquico da criança e dentro da qual se desenvolvem processos psíquicos que preparam o caminho da transição da criança para um novo e mais elevado nível de desenvolvimento. (LEONTIEV, 2010 p. 122)

Além disso, decidimos que quem conduziria a tarefa seria a professora e não a pesquisadora. Isso porque mesmo sendo diretora da escola, meu vínculo com os alunos era diferente da relação entre ela e eles, sendo esta última muito maior e também mais espontânea, já que era cotidiana.

As fotos que seriam as dicas foram tiradas com crianças das salas do período da manhã. Muitos se conheciam, pois se encontravam na hora do almoço na Creche (conveniada da prefeitura), que frequentavam em período oposto ao da escola[4]. Isso gerou muitos comentários. Talvez essa ação também tenha influenciado positivamente o grupo, as crianças das Figuras 1, 2 e 3 eram "reais", conhecidas deles.

Figura 1 − Dica de como passar pela caverna

Fonte: Fotografado pela autora

[4] Muitos dos alunos da escola frequentam, no período oposto, uma creche conveniada. Os que iam à escola pela manhã ─ 7h30m as 11h30m ─ chegavam à creche às 11h30m e saíam às 17h. E os que estudavam das 13h às 17h, ficavam na creche das 7h às 13h. Portanto, as duas turmas se encontravam na hora do almoço na creche.

Figura 2 − Dica de como passar pelo rio

Fonte: Fotografado pela autora

Figura 3 − Dica de como passar pela montanha

Fonte: Fotografado pela autora

Realizamos a tarefa no dia 4 de setembro de 2013. Como já pontuado, a professora da sala, L.K., conduziu a tarefa. A filmagem foi realizada por mim. Além disso, a chefe da seção de Educação Infantil da Secretaria da Educação de Itatiba, C.G., participou como observadora.

Apresentaremos os diálogos iniciais (Quadro 2), informamos que, quando não foi possível perceber qual a criança que falou, utilizo a forma *Cça*. Os alunos reconhecidos são identificados por meio das duas primeiras letras de seu nome. A professora é denominada *Prô*.

Quadro 2 – Início

Prô: Hoje nós vamos fazer uma brincadeira de passear na floresta. O que será que a gente pode encontrar na floresta?

Cça: O Lobo
Prô: E em uma floresta de verdade?

Cças: Lobo, fada...

Prô: Só lobo, fada...? Que mais?

Cças: Tigre, animais, ave, mata...

Prô: O João falou aves, o Enzo falou mata...

Cça: Leão.

Isa: Árvore de frutas.

Prô: Mas tem um probleminha para a gente ir à floresta. Uma fada entregou esse envelope. Neste envelope tem dicas de como a gente faz para chegar lá na floresta sem o lobo mau ver a gente. Aí, a gente não vai correr perigo.

Fonte: Vídeo da tarefa elaborado pela autora

Infiro que a proposta da professora ao dizer "*Hoje vamos fazer uma brincadeira de passear na floresta*" automaticamente despertou nas crianças a fantasia. Sabendo da impossibilidade real de passearem na floresta, elas passaram a imaginar e, ao serem questionadas ("*O que a gente pode encontrar na floresta?*"), responderam "*lobo*", "*fada*". Acredito que essa conversa inicial motivou e despertou a curiosidade dos alunos, que se mostraram muito animados, já que em muitos momentos gritavam, batiam palmas...

Figura 4 − Conversa inicial na roda

Fonte: Fotografado pela autora

Figura 5 − Aluno Ka demonstrando como o lobo faz

Fonte: Fotografado pela autora

Continuando a tarefa, a professora apresentou às crianças as dicas da fada, que estavam em um envelope decorado:

Quadro 3 – Vamos passar pela Caverna

Prô: Aqui dentro vai ter as dicas de uma linda fada que mora lá na floresta, e ela deixou para nós. E tem mais uma coisa, se a gente fizer todo o caminho, conseguir passar do jeito que ela explicou sem o lobo ver a gente, a gente vai encontrar uma surpresa. É como se lá tivesse um tesouro. [Palmas das crianças] Será que a gente vai conseguir chegar até o final?

Ma: Não, é muito difícil.

Prô: Mas eu acho que, se a gente fizer tudo que a fada tá falando pra gente fazer, a gente vai conseguir. Então, aqui tem as dicas. A primeira dica: a gente vai passar pela caverna, pelo rio e, por último, pela montanha. Se a gente conseguir passar pelos três, a gente acha a surpresa [gritos de felicidade dos alunos].

Vi: Prô, a gente vai passar pela ponte do rio?

Prô: Não. É um rio, não tem ponte. Olha, ela deixou as dicas, mas não é escrito, olha: é uma foto. É essa foto que mostra pra gente como passar pela caverna que é a primeira coisa. Vocês conseguem ver? [Todos se levantam e se aproximam]. Vamos ver se a gente consegue? Vamos montar a fila pra ver se a gente consegue?

En: De costas e de frente!

Prô: Olha o que o En falou... En, como a gente tem que ficar para atravessar a caverna?

En e vários: De costas e de frente!

Prô: Ah! É assim, olha? De costas e de frente? Vamos tentar? [Começa a organizar a fila] Vamos começar pela Ca. Ca, como você tem que ficar?

Ca: De frente.

Prô: De frente, a Ca falou. E depois? Pi, como você tem que ficar?

Pi: De costas.

Prô: De costas! Isa!

Isa: De frente.

Prô: De frente! En, e você?

En: De costas.

Prô: Vi, e você? Olha o seu amigo [Vi fica de costas também, mas rapidamente corrige e fica de frente].

Prô: La...

La: De costas...

[Com rapidez, as demais vão entrando e se organizando. Logo depois, começam a subir a rampa]

Prô: Será que vai ser fácil andar de costas? Eu acho que a gente vai ter que andar bem devagar.

[Colocando as mãos nas cabeças das crianças, vai falando as posições...] Ca de frente, costas, frente, costas....

[Subindo a rampa]

Depois de passar a caverna tem outra dica, hein?

Nossa! Tá bonito, hein?

Fonte: Vídeo da tarefa elaborado pela autora

Figura 6 - Crianças organizadas seguindo o padrão Frente/Costas

Fonte: Fotografado pela autora

Figura 7 − Passando pela "caverna"

Fonte: Fotografado pela autora

Sempre interagindo com as crianças, a professora, pela primeira vez, questiona o padrão da fila, utilizando o termo segredo (Quadro 4):

Quadro 4 – O segredo

Prô: Qual o segredo dessa fila? *Cça: É bonita.* *Prô: Só bonita? Como ela está?* *Cça: Frente e costas.* *Prô: Ah! O Vi e a Isa falaram é frente e costas! É isso mesmo, o segredo é frente e costas.* *Chegamos na caverna. A gente só consegue passar se estiver todo mundo organizado. [Gritos...]* *Chegamos em outro lugar, vamos sentar aqui, pode soltar o amigo e ficar à vontade.* *Vamos ver a outra pista! Posso mostrar?* *Cças: Sim!*

Fonte: Vídeo da tarefa elaborado pela autora

É interessante que a resposta inicial de uma criança tenha sido "*É bonita*". Isso é muito comum, nem sempre a criança entende o que a professora quis dizer, de modo que esta deve estar sempre preparada para contra-argumentar. Foi o que a professora fez; com isso, conseguiu a resposta esperada — o padrão ou regularidade da fila era "frente e costas". Acredito que isso tenha ficado muito claro para as crianças. E a professora "deu" esta informação de uma forma muito adequada, já que, na contra-argumentação, duas crianças falaram: "*Frente e costas*". A professora, por sua vez, confirmou: "*O Vi e a Isa falaram é frente e costas! É isso mesmo, o segredo é frente e costas*". Discutirei essa questão nas considerações finais.

As crianças perceberam facilmente o "segredo", como se faz visível no diálogo, explicitado no Quadro 5:

Quadro 5 – O segredo

Prô: A fada falou que pra gente atravessar o rio agora é diferente. Tem que ficar... assim [mostra a foto].
Cça: É um sentado e um de pé.
Ma: Não. Um agachado, um de joelho, um de pé.
Prô: é que este aqui agachou de joelho. Mas eu acho que era assim ó...eu acho... um de pé, um agachadinho, um de pé, um agachadinho. Será que é assim?
Cçs: Sim!

Fonte: Vídeo da tarefa elaborado pela autora

Apesar de uma pequena confusão com a foto — uma criança achou que era "agachado, joelho, de pé" e, na verdade, era "agachado e de pé" —, as crianças perceberam a questão do padrão com muita facilidade e naturalidade. Elas realmente se envolveram na tarefa, viram um sentido no que estavam fazendo. Esse fator é revelado pela rapidez com que se organizaram da segunda vez (Quadro 6):

Quadro 6 – Vamos passar pelo Rio?

Prô: Então, vamos todo mundo pra cá para gente se organizar... Vamos nos organizar?
A Ca vai começar de novo. A Ca vai ficar de que jeito?
Cças: De pé.
Prô: E o Pi?
Cças: Agachado.
Prô: Quem vai atrás do Pi?
Ka: Eu!
Prô: Vai de que jeito?
Ka: Em pé.
Prô: E agora? [Vão entrando na fila].
Isa: Agachado.
Prô: Quem vai atrás da Isa?
Ma: Eu.
Prô: Como você vai ficar?

Prô: Quem vai atrás do Ma? O En, olha. O En já se arrumou [agachado].
Você Ga. E como você tem que ficar? O En está agachado.
Cças: Em pé.
Prô: Em pé! E quem vai atrás da Ga? De pé ou agachada?
Gi: Agachada.
Prô: E atrás da Gi? Cat? Em pé ou agachada?
Cat: Em pé.
Prô: E atrás da Cat? A An! Ah! Agachada. E o Jo... em pé.
O Jo está em pé, como você vai ficar Gu.?
Gu: Agachado.
Prô: Ya, ó, ele está agachado, e você? [fica em pé]. La, você [fica agachada]. Olha, a gente já tá quase chegando [cças vão passando pelo rio]. Agachadinho... Nossa! Chegamos. Pode levantar quem já chegou.

Fonte: Vídeo da tarefa elaborado pela autora

A postura da professora de ora questionar e ora afirmar, dando a resposta, como ocorreu no momento da confusão com a foto, foi adequada, pois não teria sentindo ficar questionando o que as crianças achavam correto na foto. O objetivo, nesse caso, era outro. As crianças da Educação Infantil se dispersam com muita facilidade, e o professor tem que estar atento ao objetivo principal.

Possivelmente, se a professora tivesse questionado o que achavam que era o correto na foto ("*agachado, de joelho, em pé*" ou "*agachado e em pé*"), haveria uma longa discussão, que faria com que muitos se distraíssem. E essa é uma situação muito comum, com a boa intenção de questionar, levar as crianças a discutirem, debaterem, analisarem..., muitos professores interrogam sobre tudo e perdem o foco e a atenção do grupo. Na situação narrada, a dupla interpretação do segredo aconteceu por um equívoco, uma falta de atenção nossa, a foto não estava bem clara, o que não poderia se tornar o foco da discussão.

No Quadro 7, apresentamos o trecho final da transcrição do vídeo:

Quadro 7 – Vamos passar pela montanha?

Prô: É onde nós vamos passar, no meio da floresta... no meio da montanha. Como será que nós vamos passar agora, hein? [Mostra a foto da dica.]

Ka: Com a mão para cima [era o primeiro da fila]. A minha mão tem que ficar para cima.

Prô: A sua é para cima. E de todo mundo é para cima?

Ma: É cruzada. [Apontando para a foto] Para cima, cruzado, para baixo, para cima, cruzado, para baixo.

Prô: Eu acho que vocês já descobriram o segredo... olha... eu acho que vocês já descobriram. Vamos começar a organizar? Olha que bonitinho, o Ka e a Ca já se organizaram. E você, Pi? Olha, para cima, cruzado, para
Pietro: Assim [e abaixa o braço].

Prô: E você Vi? Tem uma ordem para cima, cruzado, para baixo. Vamos olhar do Ka [coloca a mão na cabeça] para cima, cruzado, para baixo [Vi se posiciona corretamente, vai passando pelas crianças mostrando a foto, elas vão se posicionado conforme a professora fala] para cima, cruzado, para baixo. [Elas vão passando pelo TNT que representa a montanha.]
Cça: Olha a floresta [mostrando o TNT verde que representada a montanha]. Qual o segredo desta pista? Como tinha que ficar?
Ma: Tem um monte de coisa.
Prô: Um monte de coisa? Será? Vamos contar? A primeira para cima, depois cruzado e depois para

baixo.
Vi: Três.
Prô: Três! Para cima, cruzado, para baixo. E se a prô, presta atenção. Se a La está com a mão para cima, se eu entrar na fila?
Ma: Cruzada.
C.G.: (chefe da Educação Infantil que acompanhava a atividade): E eu?
Cças: Para baixo.
Prô: Vocês encontraram alguma coisa?
[Gritos por causa do tesouro].

Fonte: Elaborado pela autora

Sem dúvida, destaca-se a rapidez com que o aluno Ka se posiciona e fala que sua mão tem que ficar para cima e, também, a percepção dos demais relativa à foto e à definição de suas posições. Convém lembrar que são crianças de 4 e 5 anos analisando várias coisas ao mesmo tempo: a foto, o padrão a seguir, a posição do colega da frente, a própria posição e, muitas vezes, ainda a posição do colega que estava atrás.

Muito rapidamente se organizavam e cuidavam para que todos fossem se colocando adequadamente para que o passeio e a missão de encontrar o "tesouro" tivesse sucesso. Não é fácil conseguir esse cuidado e essa consciência coletiva com crianças pequenas. É usual brincarem juntas, mas não é comum construírem algo juntas. Essa tarefa proporcionou essa sensação de coletivo, pois os estudantes tinham um objetivo em comum, descobrir o tesouro.

As figuras que seguem refletem a integração e a alegria das crianças, demonstrando como efetivamente se envolveram com a tarefa.

Figura 8 − Analisando a última dica

Fonte: Fotografado pela autora
Nota: Percebe-se que os alunos já começam a se organizar sozinhos.

Figura 9 − Passando pela montanha

Fonte: Fotografado pela autora

Figura 10 − Encontrando o tesouro

Fonte: Fotografado pela autora

Figura 11 − *Alegria ao descobrir o que era tesouro*

Fonte: Fotografado pela autora

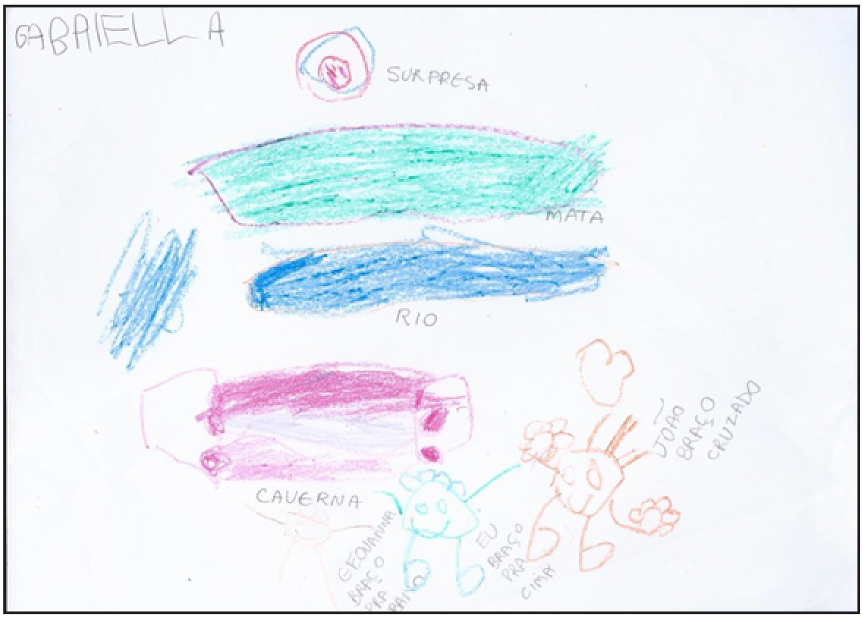
ALGUMAS REFLEXÕES

Após a realização da tarefa, houve a discussão em sala e o registro por meio de desenhos. Analiso, em seguida, as representações dos alunos. Em muitos registros, está representado o padrão, não de forma clara. Quando houve o questionamento sobre os desenhos, os alunos retomaram e falaram o tal "segredo", como podemos ver nas Figuras 12 e 13. As marcações escritas foram feitas por mim.

Figura 12 − Representação do aluno Ma

Fonte: Arquivo da pesquisa
Nota: Convém observar o detalhe da representação das mãos cruzadas, quando o aluno utilizou o X.

Figura 13 − Representação da aluna Ga



Fonte: Arquivo da pesquisa
Nota: É notável o detalhe da representação do rio, da floresta, da caverna e também dos braços, cruzados e posicionados para

cima e para baixo.

As representações das crianças são interessantes, pois indicam que estas se remeteram à tarefa realizada, no que se refere tanto aos elementos da história ─ rio, floresta, caverna, surpresa, lobo mau escondido ─ quanto ao propósito principal ─ o desenvolvimento do pensamento algébrico (regularidades e padrões). Isso me faz pensar que tal atividade atingiu o objetivo pretendido, que era estabelecer um contato inicial com as regularidades e os padrões.

Os registros pictóricos de atividades na Educação Infantil estão muito presentes na prática da sala de aula. Dentre nossas discussões no grupo sobre a necessidade e a importância desse tipo de registro, cito as contribuições do professor Arthur B. Powell (Ph.D do *Department of Urban Education* da Rutgers University) e da professora doutora Adair Mendes Nacarato da USF (Universidade São Francisco). Em nossas reflexões, percebemos que as atividades que devem ser registradas são aquelas que fazem sentido para as crianças, as que foram significativas e as colocaram em movimento de pensar e aprender. De nada adianta solicitar o registro pictórico de uma atividade que teve pouca participação e envolvimento.

Quando solicitado o registro, este deve ser, para o professor, uma ferramenta de reflexão de sua prática, além de ser o instrumento de avaliação da atividade em si ou da criança. Sobre isso, Toricelli (2008, p. 107) afirma:

> É importante ressaltar que nem todas as atividades realizadas pelas crianças necessitam ser registradas. Entretanto, quando a professora reconhece no registro da criança uma possibilidade de avanço, de evolução, entendemos que aquele passa a ter, para essa professora, um outro sentido – também de reflexão sobre a sua prática.

Dessa forma, o registro pictórico não pode ser banalizado. Como exposto anteriormente, ele deve ser um instrumento quando uma atividade é importante ou interessante, quando ela fez sentido para a criança e a envolveu. Para o professor, ele deve ser um auxílio para a análise da atividade em si e de sua própria prática.

Outro fato que chamou a atenção foi que, quando questionados sobre o segredo pela primeira vez, as crianças responderam que era "*frente e costas*", indicando que esse é o padrão que se repete. Muitas vezes, em tarefas de colagem ou pintura, como a das bandeirinhas de festa junina que citei anteriormente, ao questionar as crianças sobre a regularidade, o motivo, a resposta é uma repetição, por exemplo: azul, verde, azul, verde, azul, verde. Ou seja, a criança percebe a regularidade, mas não o padrão, que é apenas azul e verde. No caso da tarefa, acredito que, por serem crianças na foto, perceberam que não era uma repetição simples e, por consequência, concluíram rapidamente que o motivo não era a repetição das crianças, mas sim a posição que estavam ─ frente e costas. Se essa hipótese estiver correta, ou seja, se a atividade corporal proporcionou às crianças a visualização imediata do padrão, concluo que as atividades sobre padrão deveriam iniciar por atividades corporais, tanto na Educação Infantil quanto nas séries iniciais.

Finalmente, é preciso pontuar que acredito que as atividades na Educação Infantil não precisam ser integralmente lúdicas, com histórias e cenários. Mas é imprescindível que algumas sejam, principalmente as que introduzem algum conceito novo. Desse modo, garante-se o interesse e o entendimento inicial de tal conceito. Com isso, a continuidade do trabalho com outras tarefas provavelmente será mais significativa.

A experiência da tarefa foi rica, porém mais rico ainda foi o processo de análise e discussão e também a pausa para a escrita deste texto. É esse processo de análise, discussão e reflexão que proporciona o aprimoramento de minha ação na escola como gestora. Apesar de não atuar em sala de aula, tenho subsídios para orientar, sugerir, questionar... levar à reflexão! Nesse movimento, posso oportunizar também o desenvolvimento profissional dos docentes da escola onde atuo.

REFERÊNCIAS

COCHRAN-SMITH, Marilyn.; LYTLE, Susan. L. Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, USA, n. 24, p. 249-305, 1999.

LANNER DE MOURA, Anna Regina. *A medida e a criança pré-escolar*. 1995. 221 f. Tese (Doutorado)− Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

LEONTIEV, Alexis N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTISKII, L.S; LURIA A.R.; LEONTIEV, A.N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Cone, 2010.

TORICELLI, Luana. O registro das crianças e a matemática na educação infantil. In: GRANDO, Regina Célia; TORICELLI, Luana; NACARATTO, Adair Mendes (Org. *De professora para professora*: conversas sobre iniciação matemática. São Carlos: Pedro e João Editores, 2008. p. 103-121. Versão Traduzida.

QUAL É O SEGREDO? É PARA VOCÊ O DESCOBRIR!

Selma Nascimento Vilas Boas

Na época da escrita desta narrativa, 2015, estava cursando o segundo ano do mestrado em Educação na Universidade São Francisco, em Itatiba. Trabalhava na direção de uma escola pública de Educação Infantil em Campinas. Minha pesquisa de mestrado trata da elaboração conceitual de crianças da Educação Infantil (4 a 6 anos) sobre o tempo. Neste estudo, analisei os desenhos, as falas e as narrativas produzidas pelas crianças no decorrer de 16 encontros cuja proposta era discutir o tema.

Em 2014, ao ingressar no mestrado como aluna regular, recebi o convite da professora Adair e de minha amiga Marjorie (que já frequentava o grupo) para participar do Grucomat (Grupo Colaborativo em Matemática). Logo de início, aceitei o convite de participar de um grupo de estudo de Matemática, porque sentia uma "lacuna" em minha formação em relação a tal área do conhecimento. Cursei o Magistério e depois Pedagogia, ambos os cursos fizeram uma abordagem superficial da Matemática. Ao ingressar como professora da rede pública, sempre participei de muitos cursos de formação continuada, e todos tinham como foco principal as questões da língua materna. Fiz também quatro pós-graduações com foco na gestão escolar, na educação inclusiva, na dificuldade de aprendizagem e na construção do conhecimento, sendo as maiores indagações delas relacionadas à língua materna. Com isso, a participação no grupo era a garantia de estudar Matemática e aprender como levar esse conhecimento tão importante aos alunos.

Quando cheguei ao grupo, deparei-me com o estudo de padrões. No início foi muito difícil, mas, com o tempo, as dificuldades foram sendo superadas. Em uma das etapas do trabalho, foi elaborada uma sequência de atividades para trabalhar com todas as faixas etárias, inclusive com a Educação Infantil. Nesse momento, candidatei-me para aplicar a sequência de atividades da Educação Infantil na escola onde trabalho.

Com essa sequência em mãos, conversei com uma das professoras da escola sobre o trabalho do grupo e solicitei a autorização para aplicar tal atividade com seu grupo de crianças. A professora ─ muito esforçada, dedicada e comprometida com o trabalho pedagógico ─ concordou, uma vez que entendeu a necessidade que temos de realizar tais atividades para avaliar o que realmente contribui para o trabalho pedagógico da primeira infância.

A ATIVIDADE DE MONTAGEM DO TREM

No dia 03 de outubro de 2014, fui até a sala da professora e iniciei a atividade. A professora acompanhou todo o trabalho por mim desenvolvido. Primeiramente, conversei com as crianças e expliquei que iríamos fazer uma atividade juntos. Expliquei a importância do gravador, afirmando que precisava gravar as aulas para fazer um trabalho da universidade. Ressaltei que o único jeito de não me esquecer de nenhuma fala era fazer um registro de toda a aula.

Após esse momento, com as crianças organizadas em roda, perguntei: "*Vocês conhecem algum trem? Vocês já viram trem? Alguém já andou de trem?*". As crianças comentaram que já o tinham visto na televisão, nos filmes, em fotos... Mas algumas não fizeram nenhum comentário. Então, mostrei a Figura 1 para garantir que todos tivessem a um referencial de trem, pois, no decorrer da aula, iríamos falar sobre ele.

Figura 1 - Foto do trem apresentada às crianças

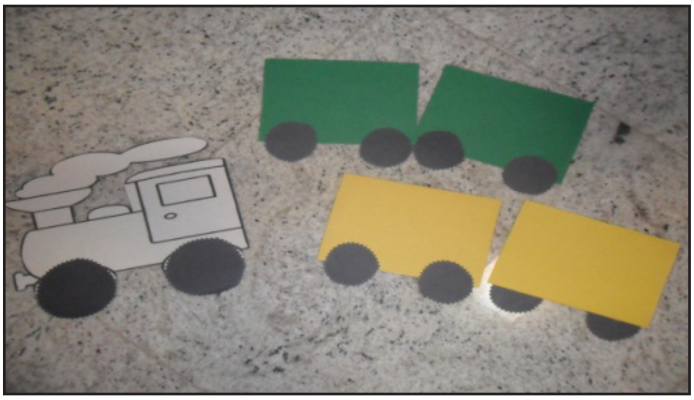
Fonte:https://www.google.com.br/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=imagens%20de%20trem

As crianças observaram a foto e fizeram comentários. Seguem algumas falas das crianças:

Uau!
Nossa, que legal!
Eu quero ver o trem.
Deve ser muito legal andar de trem.
Aqui só tem trenzinho que carrega criança.
Ele é vermelho.
Esse trem é de verdade!
Nossa, acho que o trem bateu, porque está curvado!
Eu já vi um trem igual a esse.
(Gravação do dia 03 out. 2014)

Em seguida, mostrei o trem de papel que havia confeccionado com papel *color set*. A proposta era apresentar o trem em partes para que as crianças o montassem. Objetivava, com isso, motivá-las a participar da atividade. A Figura 2 retrata as peças do trem:

Figura 2 – Peças do trem

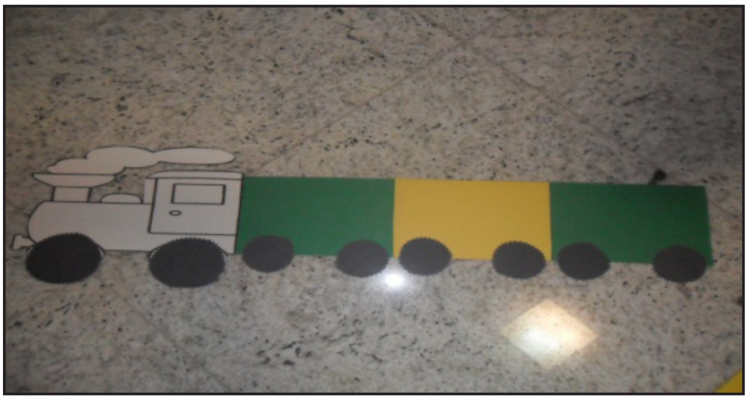


Fonte: Fotografado e preparado pela autora

Depois de mostrar as peças, apresentei a primeira proposta da montagem do trem:

> *Vamos montar um trem! Olha só, vou colocar algumas peças.*
> *Prestem atenção! Observem como o trem está.*
> *[Comecei a montagem do trem. Após colocar três peças, disse às crianças que o trem tinha um segredo.*
> *Para continuar montando o trem, precisavam descobrir o segredo].*
> *Qual é a próxima peça do trem? Quem sabe?*
> *(Gravação do dia 03 out. 2014)*

Figura 3 – Primeira montagem apresentada às crianças



Fonte: Fotografado e preparado pela autora

Perguntei-lhes novamente: "Quem *sabe qual é o segredo para poder continuar o trem?*". Uma das crianças olhou para o trem o logo afirmou que a próxima peça seria a amarela. Outras crianças também falaram que seria a amarela. Então, a peça foi colocada, e eu continuei questionando as crianças sobre a próxima peça, e elas foram colocando as peças e aumentando o trem. Sempre chamava uma criança diferente, a fim de garantir a participação de todas.

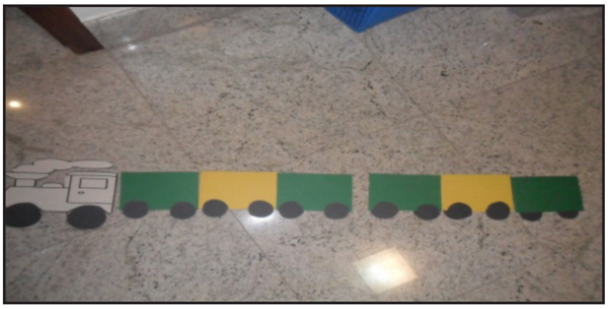
Com o trem montado, interroguei sobre o segredo para formar a locomotiva. As crianças olhavam para o trem montado e diziam: "*Verde, amarela, verde, amarela, verde, amarela, verde, amarela*". Falavam apontando para as peças, da primeira até a última. Reforcei que o segredo desse trem era uma peça amarela e outra verde. Todos concordaram.

Propus, então, a montagem de um novo trem. Desta vez, comecei o trem e coloquei duas peças verdes, uma amarela e duas verdes. Perguntei: "*Qual é o segredo? Qual é a próxima peça?*". Uma das crianças respondeu rapidamente que seria a peça amarela. Em roda, elas foram falando as cores e montando o trem. Com o trem pronto, questionei sobre o segredo. Lembrei-as que, no caso do primeiro trem, o segredo era uma peça verde e uma peça amarela. Observando o trem montado, as crianças responderam: "*Dois verdes e um amarelo, depois dois verdes e um amarelo*". Questionei-as: "*Então, o segredo mudou?*". Elas responderam: "*Sim!*".

Iniciei a montagem de outro trem, colocando uma peça verde, uma amarela e uma verde. As crianças apresentaram dificuldade. Elas olhavam para a sequência e diziam que a próxima peça era a verde e depois amarela. Mas, na hora de falar sobre o segredo, diziam que o segredo era duas verdes e uma amarela, e não uma verde, uma amarela e uma verde.

Chamei a atenção das crianças para a primeira peça, que era apenas uma verde sozinha, e para a segunda, uma amarela. Após algumas intervenções, as crianças entenderam que o segredo desse trem era: uma verde, uma amarela e uma verde. Para facilitar a visualização das crianças, dividi as partes do trem por segredo. A Figura 4 mostra a divisão:

Figura 4 – Montagem do trem apresentada às crianças



Fonte: Fotografado e preparado pela autora

Depois da montagem dos trens, retomei os segredos dos trens montados e falei sobre a segunda proposta da aula: "*Agora, não vamos montar trem, vamos montar uma fila. Fiquem atentos*".

A ATIVIDADE DE MONTAGEM DA FILA

Solicitei a ajuda de algumas crianças e montei a fila com uma criança em pé e outra sentada, uma em pé e outra sentada. Perguntei: "*Qual é o segredo da fila?*". Uma das crianças respondeu rapidamente que era o nome de cada criança e sua posição, levantada ou sentada. Questionei sobre como deveria ficar a próxima criança, chamei uma delas e pedi para ela se posicionar na fila. Ela entrou na fila e ficou em pé. Perguntei ao grupo se estava correto, e todos disseram que sim. Mais quatro crianças entraram na fila e se posicionaram adequadamente.

Formei outra fila. Desta vez, coloquei um menino, uma menina, um menino e uma menina. Ao perguntar sobre o segredo da fila, uma das crianças falou o nome de todas as crianças que estavam na fila. Questionei: "*Se eu fosse continuar a fila, quem deveria ser o próximo?*". Um dos meninos logo levantou e foi para a fila afirmando: "*Já sei, já sei: é um menino, uma menina, um menino, uma menina...*". Disse-lhe que estava certo, que o segredo dessa fila realmente era esse.

Propus, então, a terceira atividade. Pedi para duas crianças ficarem no corredor da escola enquanto o grupo iria fazer outra fila, com outro segredo, para elas adivinharem. As crianças gostaram muito desse desafio. O fato de ter duas crianças no corredor da escola causou um suspense, isso as motivou a participar.

Na sala, fui conversando com os demais estudantes, até que eles chegaram a um acordo de fazer a fila com uma criança em pé e outra sentada na cadeira. As duas crianças que estavam fora da sala adivinharam facilmente qual era o segredo e logo se posicionaram na fila, ficando uma criança em pé e outra sentada na cadeira.

A ATIVIDADE DO DESENHO

Em seguida, apresentei a última proposta do dia. Cada criança deveria fazer um desenho que tivesse um segredo para os colegas descobrirem. As crianças sentaram nas mesinhas, receberam lápis de cor e uma folha e começaram os desenhos.

Antes do início dos desenhos, reforcei o segredo dos três trens que havíamos montado e o das filas. Conforme as crianças iam terminando o desenho e me entregando, tive uma grande surpresa. Após observar o desenho, perguntava as crianças: "*Muito bem, qual é o segredo?*". As crianças respondiam: "*Não posso falar! O segredo é para você adivinhar!*".

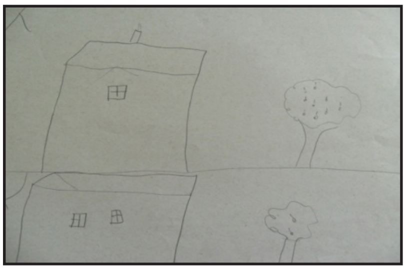
As Figuras 5, 6 e 7 são fotos de alguns dos desenhos feitos pelas crianças, ao lado estão as falas delas:

Figura 5 – Registro da atividade

Selma, olha o que eu fiz... Qual é o segredo? Você tem que adivinhar!

Fonte: Fotografado pela autora

Figura 6 – Registro da atividade



Selma, tem dois desenhos. Olha para os dois e descobre o segredo!

Fonte: Fotografado pela autora

Figura 7 – Registro da atividade

Selma, tem filho, filho, filho, mãe, mãe, mãe, pai, pai, pai, vô, vô, vô, e agora chega! Você tem que adivinhar o segredo.

Fonte: Fotografado pela autora

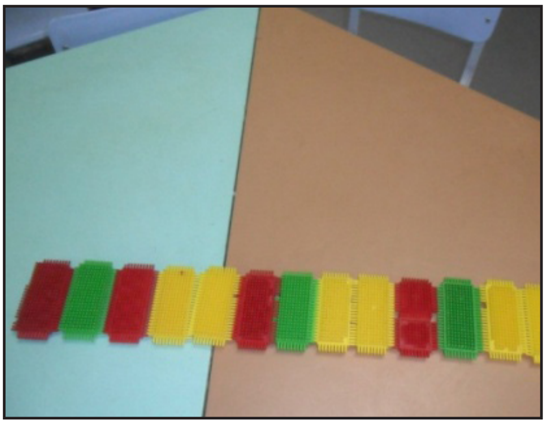
UM NOVO PLANEJAMENTO

Encerrou-se nossa aula com as crianças dizendo que eu deveria adivinhar o segredo dos desenhos. O resultado que eu esperava era que as crianças pensassem em uma sequência com um segredo. Poderia ser o desenho de um trem com segredos diferentes dos que já havíamos feito ou uma fila com outra disposição ou, até mesmo, outras sequências, com outros objetos da sala. Mas elas interpretaram a palavra segredo de outra forma: como o segredo do jogo dos sete erros e também como algo escondido no desenho para adivinhação.

Questionei-me: “E agora, o que fazer?”. Retornei ao Grucomat com o resultado do trabalho, e discutimos sobre a questão do vocabulário na Educação Infantil. Os sentidos dados pelas crianças às palavras utilizadas em alguns casos são diferentes dos nossos. Foi ressaltada a importância de as crianças terem manipulado as peças do trem, ou seja, de terem a oportunidade de fazer a atividade com as peças do trem antes de ir para a formação da fila, envolvendo o corpo. Em relação à linguagem, concluímos que a palavra segredo pode ter confundido o pensamento das crianças. No final da discussão, decidimos apresentar outra atividade, como, por exemplo, pedir às crianças para representarem uma sequência com um segredo, mas, desta vez, com objetos.

Na semana seguinte, retornei à sala de aula e propus às crianças que, em pequenos grupos, elaborassem uma sequência, utilizando as peças de um jogo de montar (Figura 8), para os colegas adivinharem qual era o segredo e continuarem a sequência.

Figura 8 – Peças do jogo utilizado para a atividade



Fonte: Fotografado pela autora

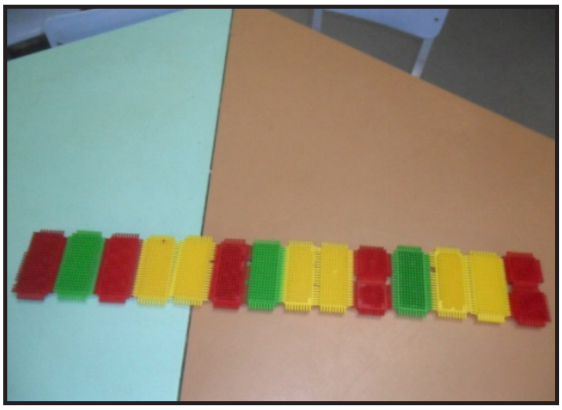
A primeira sequência, feita por uma das crianças, foi a seguinte: vermelho, verde, vermelho, amarelo e amarelo, como destacado na Figura 9.

Figura 9 – Primeira sequência montada por uma das crianças

Fonte: Fotografado pela autora

As crianças rapidamente falaram as cores e logo foram completando a sequência, colocando o vermelho, verde, vermelho, amarelo e amarelo (Figura 10).

Figura 10 – Sequência completada pelas demais crianças do grupo



Fonte: Fotografado pela autora

Logo após, outra criança fez a seguinte sequência de cores: verde, verde, azul, amarelo, azul e vermelho (Figura 11). As demais crianças repetiram as cores na mesma sequência: verde, verde, azul, amarelo, azul e vermelho.

Figura 11 – Sequência feita por uma das crianças

Fonte: Fotografado pela autora

Ao questionar as crianças sobre qual era o segredo para continuar a sequência, elas repetiam todas as cores, da primeira até a última. Mas elas não respondiam que o segredo era verde, verde, azul, amarelo, azul e vermelho. Com isso, foi possível verificar que as crianças conseguiram criar uma sequência, adivinhar qual era o segredo da ordem das peças e completar a sequência com a peça correta, correspondente à disposição que já estava posta. Porém, não identificavam o segredo, o padrão que repetia.

A socialização da atividade com os participantes do Grucomat permitiu que encontrássemos juntos novas estratégias para desenvolver a atividade com as crianças. Verificamos que a atividade com as peças móveis também foi importante para o trabalho.

E o segredo? Sempre que nos dispomos a trabalhar com as crianças pequenas e também com as maiores, precisamos estar atentos para desvendar todos os mistérios que envolvem uma prática educativa. Muitas vezes preparamos uma aula e, ao nos depararmos com as crianças, os resultados nos levam para outros horizontes. Isso não é problema! O importante é refletir sobre o planejamento, sobre a prática, sobre os resultados, e propor novos planejamentos e novas práticas. Quando tais ações são realizadas em grupo, tudo fica mais fácil. Isso é também um segredo.

Por falar em discussão em grupo, no dia 15 de junho de 2015, o professor Arthur Powell[1] visitou o Grucomat. Antes do encontro, ele leu todas as narrativas dos participantes, inclusive a minha, e deu uma devolutiva muito enriquecedora, do ponto de vista conceitual. Foi um momento de aprendizagem! Ao ouvi-lo, percebi o quanto estava equivocada em relação à forma como apresentei a atividade do trem às crianças. O pesquisador me levou a concluir que eu expus às

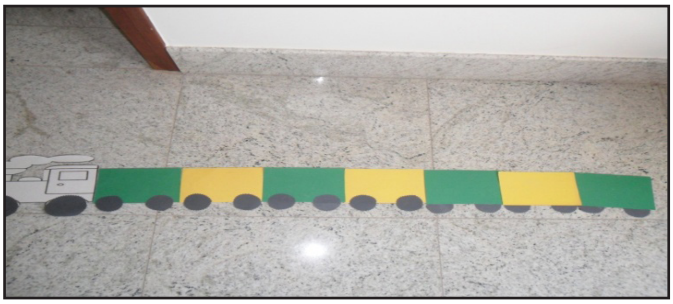
[1] Professor Adjunto de Educação Matemática do Departamento de Educação Urbana da Universidade Rutgers, Newark, e Diretor Associado do Instituto Robert B. Davis para a Aprendizagem da Escola de Pós-Graduação em Educação da Universidade Rutgers, New Brunswick.

crianças o padrão, mas deveria ter apresentado uma sequência. Isso dificultou a compreensão das crianças e as levou a montar padrões e não sequências. No final do encontro, estava decidida a fazer novamente a atividade com outro grupo de crianças[2].

No dia 04 de agosto de 2015, iniciei, em outro grupo, a proposta com a roda de conversa sobre o que iríamos fazer. Depois, apresentei a foto do trem e discutimos um pouco. As crianças contaram que já conheciam o trem, e duas delas relataram já ter andado de trem.

Após esse momento, expliquei que iríamos brincar de montar um trem, mas, para fazê-lo, indiquei que elas precisavam descobrir o segredo. Então, peguei as peças e montei o trem com a seguinte sequência de cores:

Figura 12 – Foto ilustrativa do primeiro trem montado



Fonte: Fotografado pela autora

Enquanto eu montava a sequência, as crianças observavam atentamente. Ao questioná-las qual seria a próxima peça. Algumas já disseram ser a amarela.

Davi[3]: Tem que ser o amarelo, depois o verde, depois o amarelo.
Isabela: Tem que seguir uma sequência.
Selma: Qual é a sequência?
Isabela: Um amarelo, um verde, um amarelo, um verde...
Selma: Qual é, então, o segredo para montar este trem?
Isabela: É um verde e um amarelo, um verde e um amarelo.

Após essa conversa, montei outro trem com a seguinte sequência de cores: amarela, amarela, verde, verde, amarela, amarela, verde, verde.

Selma: Quem sabe qual é a próxima peça?
Isabela: Tem que seguir a sequência das cores!
Marcos: Agora é amarelo [levantou-se e colocou a peça amarela].
Carlos: Agora é a verde.
Isabela: Não! Agora é a verde, porque tem dois verdes. Então, é o verde!

[2] Como já era outro ano, o primeiro grupo de crianças não estava na escola. Propus uma parceria com outra professora e realizei a atividade. As crianças deste grupo tinham entre 4 e 5 anos.
[3] Apresento as crianças com nomes fictícios. Somente indico os nomes no trabalho com o segundo grupo, pois apenas os registrei nesse momento.

Selma: Qual é o segredo para montar este trem?
Marcos: Amarelo, amarelo, verde, verde...
Alexandro: Dois verdes e dois amarelos.
Selma: Vocês concordam com o Alexandro?
Crianças: Sim!

Montei, então, o terceiro trem com a seguinte sequência: verde, amarela, amarela, verde, amarela, amarela, verde. Rapidamente as crianças descobriram o segredo e continuaram, um de cada vez, montando o trem.

Apresentei a proposta de eles montarem o trem. Chamei o Davi e solicitei que ele construísse o trem com um segredo para os demais colegas descobrirem. Davi fez o trem com esta sequência: amarela, amarela, verde, verde, amarela, amarela, verde, verde. Mais uma vez as crianças descobriram o segredo e continuaram a montagem do trem. Ao questioná-las sobre o segredo, responderam:

Carlos: É amarela, amarela, verde, verde... [foi falando até a última peça].
Isabela: O segredo são duas amarelas e duas verdes.

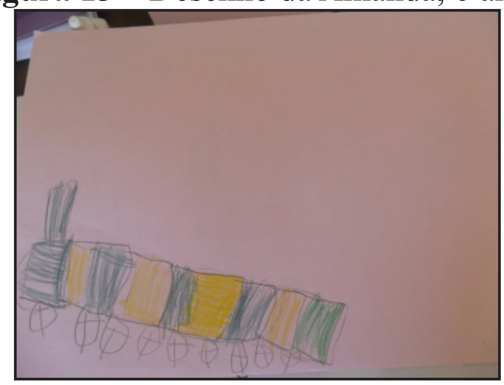
Depois, foi a vez da Isabela. Ela montou o trem com a sequência: verde, verde, amarela, verde, verde, amarela, verde, verde, amarela. As crianças descobriram a sequência e já completaram o trem. Ao perguntar-lhes sobre o segredo algumas disseram ser duas verdes, uma amarela, duas verdes, uma amarela. As demais concordaram.

Por último, foi a vez da Beatriz que constituiu a seguinte ordem: verde, verde, amarela, amarela, verde, verde, amarela, amarela. As crianças desvendaram o segredo e seguiram a montagem do trem. Cada criança que se levantava para completar o trem já colocava duas peças, duas verdes ou então duas amarelas.

Nesta última montagem, ficou evidente a questão de as crianças já conseguirem completar com duas peças. Até então, cada criança da roda levantava e colocava uma peça. Ao interrogá-las sobre esse fator, uma delas respondeu: "a sequência são duas peças de cada cor". E, ao questioná-los sobre o segredo deste trem, aoutra criança respondeu: "duas verdes e duas amarelas".

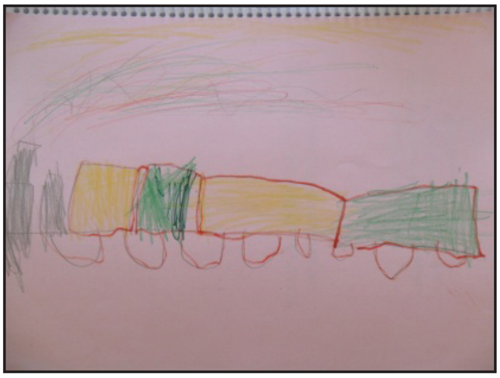
No segundo momento da proposta, solicitei às crianças que fizessem um desenho sobre a atividade do trem, retratados nas Figuras 13 e 14.

Figura 13 – Desenho da Amanda, 6 anos



Fonte: Fotografado pela autora

Figura 10 – Desenho do Gabriel, 5 anos



Fonte: Fotografado pela autora

Assim encerrou-se a atividade com este grupo. Observei exatamente o que o professor Arthur havia relatado em sua avaliação. Na primeira atividade, apresentei o padrão, por isso as crianças não fizeram o que eu esperava ─ uma sequência com um padrão. Já neste grupo, compus uma sequência de peças com um padrão de repetição de cores.

As crianças entenderam a proposta e criaram sequências com padrão. Em sua visita, Arthur ressaltou que, na Educação Infantil, é importante que as crianças consigam verificar o que se repete na sequência para, então, completá-la. Tal raciocínio será importante nos estudos mais adiante.

Finalizando, ressalto alguns pontos importantes para o desenvolvimento de atividades. Um deles é planejamento, em grupo, de uma sequência de tarefas com intencionalidade pedagógica. Outro é a realização de tarefas como a aqui relatada com as crianças. Também se destaca a avaliação dos resultados com todos os integrantes do Grucomat e a visita do professor Arthur. Tais pontos foram significativos, em primeiro lugar, para minha formação e, em segundo, para a aprendizagem das crianças.

AS POTENCIALIDADES DAS TAREFAS INVESTIGATIVAS SOBRE PADRÕES NUMÉRICOS EM UM 3.º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Cidinéia da Costa Luvison

INTRODUÇÃO

O Grucomat (Grupo Colaborativo em Matemática) da Universidade São Francisco, Itatiba/SP, é um espaço de discussões que existe desde 2003 e que frequento desde 2009. O grupo elabora tarefas e as desenvolve com os alunos em sala de aula; para isso, utiliza a videogravação como recurso para a prática de formação em estudos das aulas e dos discursos matemáticos dos alunos. As cenas compartilhadas com os integrantes do grupo são selecionadas pelo professor que as gravou.

Vejo o grupo como um processo de fazer-se e refazer-se cotidianamente por meio da mobilização, da ação e da cumplicidade progressiva, criada a partir de um ambiente de construções, aprendizagens e negociações. Nesse espaço, refaço-me constantemente, reflito, reinvento, analiso, escuto e sou ouvida, pois ali é estabelecido um compromisso mútuo, um ambiente de cumplicidade.

A presente narrativa nasceu a partir desse ambiente de trocas e reflexões, que esteve presente na vida de outros sujeitos: os alunos do 3.º ano do Ensino Fundamental, duas turmas que estiveram comigo nos anos de 2014 e 2015. A tarefa escolhida para este texto faz parte de um estudo desenvolvido desde o ano de 2012, em que nos propusemos a estudar e organizar sequências de tarefas sobre padrões.

Em alguns encontros de 2012, dedicamo-nos à leitura de textos de autores como Booth (1995), Usiskin (1995), Vale e Pimentel (2011) e Van de Walle (2009). Em 2014, discutimos a mesma temática com os textos de Radford (2013) e Stephens e Ribeiro (2012), que tratavam de concepções sobre a álgebra nas aulas de Matemática. Em 2015, continuamos esse estudo, organizando sequências de tarefas que envolvessem o conceito algébrico, dentre elas estava a tarefa das tiras, adaptada do livro Patterns and Figures (KINDT; ROODHART, 2006, p. 1).

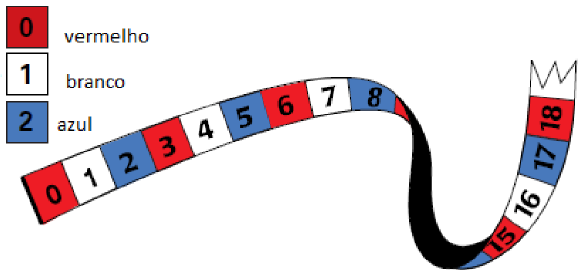
Apliquei a supracitada tarefa a uma turma para a qual lecionava. Os alunos que participaram são crianças entre 8 e 9 anos do 3.º ano do Ensino Fundamental. Trata-se de duas turmas de uma escola pública da rede municipal de ensino de Bragança Paulista/SP que atende aproximadamente 450 alunos dos anos iniciais nos períodos da manhã e da tarde. Sou professora dessa escola há 12 anos. Atualmente a instituição atende crianças do 2.º ao 5.º ano do Ensino Fundamental.

A tarefa desenvolvida foi a apresentada no Quadro 1:

Quadro 1 – Tarefa das fitas de números coloridos

TIRA DE TRÊS NÚMEROS COLORIDOS

- Esta é uma tira diferente, repetindo as cores em uma sequência: vermelho, branco, azul; vermelho, branco, azul.



- 1. Observando as cores dos números, responda:
- a) O que a sequência de números brancos tem em comum?
- b) Entre o 7 e o 16, quais números brancos existem?
- c) O que a sequência de números vermelhos tem em comum?
- d) Qual é a cor do número 51? ____________Como você sabe disso?
- e) Qual é a cor do número 37? ____________ Como você sabe disso?

Fonte: Adaptado pelo Grucomat de Kindt e Roodhart (2006)

O objetivo da tarefa era que os alunos conseguissem identificar o padrão proposto na tira, estabelecendo relações entre a cor e sua posição. Além disso, tencionava que os estudantes identificassem números pares e ímpares, compreendessem a ordem de distribuição desses números — a antecipação, a regularidade dos números — e reconhecessem suas diferenças e suas semelhanças.

Tendo isso em vista, narro em seguida um momento vivido com as crianças em 2015. Mas antes disso, analiso o movimento realizado com a mesma tarefa no ano de 2014 e meu percurso enquanto professora nesses dois momentos.

A TAREFA DAS FITAS: UM MOMENTO DE REFLEXÕES

Dos 26 alunos do 3.º ano, nesse dia estavam presentes 19, organizados em duplas e trios. Para a videogravação, contei com o auxílio de uma professora, mestranda do programa de pós-graduação da Universidade São Francisco. Organizei cada vivência com os alunos em episódios. Compreendo os episódios como momentos nos quais os estudantes levantam hipóteses e argumentam sobre os conceitos trabalhados. Neste primeiro momento a narrativa está dividida em quatro episódios.

Por se tratar de uma sequência que enxergava como mais complexa para os alunos, estava receosa em intervir em alguns momentos, parece que me faltavam elementos para levar a discussão adiante, mas procurei desenvolvê-la e acreditar que eles conseguiriam. A insegurança estava mais em mim do que neles.

Pedi para que os alunos fizessem a leitura e conversei a respeito da tarefa com as duplas e os trios. Quando iniciamos, algo que me chamou a atenção foi a dificuldade de entender o significado dos termos "tem em comum". Procurei, na dupla de A e B, intervir para que conseguissem chegar a algumas conclusões. Considero esse momento de grande importância para eles, tanto para a compreensão quanto para a reflexão sobre alguns pontos da tarefa.

Episódio 1 - Os números escondidos

Cid: [os alunos da primeira dupla não entendem a pergunta] *Me falem primeiro o que vocês descobriram da faixinha e depois eu ajudo vocês entenderem a pergunta...*
A: Tem uma parte dobrada.
Cid: Então, os números estão escondidos?
B: Sim.
Cid: E que números são esses?
B: 9, 10, 11, 12, 13, 14....
Cid: Os números escondidos vão seguir essa sequência de cores?
A: Aqui [mostra na fita] *vermelho, branco e azul.... Já descobri, eles vão de 3 em 3...*
Cid: Me explica melhor A.
A: O vermelho vai de 3 em 3, o azul de 2 em 2, e o branco vai de 4 em 4.
Cid: Todo branco vai de 4 em 4? Toda a sequência vai de 4 em 4? O que você acha?
A: Não.
B: Acho que vai de 1 em 1.
A: Mas vai pulando as cores...olha começa com o 0 vermelho, 3 vermelho, 6 vermelho...essa parte [aponta para a parte escondida] *é igual à fita métrica...a ponta está rasgada...*
Cid: Você acha que tem continuidade?
A: Sim.
Cid: Como você sabe disso?
A: Vai continuando.
Cid: Vocês acham que é igual à fita que vimos na aula anterior?
B:Um pouquinho diferente, porque aquela só tinha vermelho e branco...
Cid:Qual você acha que estava mais fácil de descobrir o segredo?
B: A fita da primeira tarefa, porque ela só estava rasgada, não estava dobrada.
Cid: Entendi... Vou fazer a leitura desta e vocês me dizem o que entenderam [faço a leitura da questão].
B: O segredo é que está dobrado...
Cid: E o que os espaços em branco tem em comum? O que é ser comum?
A: Vai pulando numa sequência de cores...
B: Vai pulando os números de 2 em 2 [áudio ruim].
Cid: Entendi... Mas o que os espaços em branco tem em comum?
[Os alunos olham para a fita e constroem hipóteses (temos 1, 4, 7...), e vou instigando o levantamento de mais hipóteses]
B: [faz a contagem e descobre que os números escondidos são o 10 e o 13, referindo-se aos números dos espaços brancos] Eles são brancos...
Cid: Então, eu tenho os números 1, 4, 7, 10, 13 e o 16 branco... E o que eles têm

em comum?
A: Eles vão numa sequência... [áudio ruim]
Cid: Quando descobrirem mais algum segredo, me chamem.

A e B não compreendiam o que a palavra em comum queria dizer, mas, com a leitura em voz alta e o questionamento sobre a palavra e o sentido da frase, acabaram compreendendo a situação-problema e seguiram a discussão com tranquilidade. Além disso, estabeleceram analogias com a fita métrica, tarefa que havíamos realizado uns dias antes e refletiram, incentivados pela intervenção, sobre os "números escondidos". Noto que a preposição "entre" é algo complexo para as crianças; por isso os levei a refletir bem mais que em outros casos, como o dos números sucessores e antecessores.

Outro ponto relevante foi quando F e A fizeram a contagem dos números da fita com o objetivo de ir até o número 51.

Episódio 2 - A sequência é: vermelho, branco e azul

[Esta dupla faz a contagem e chega à conclusão de que a fita continuaria com a cor branca e logo passaria a ser vermelha, porque ela se inicia com a cor vermelha. Eles desconsideram a sequência de cores.]
Cid:Mas, se eu continuar com o branco e logo pôr o vermelho, vai seguir a sequência? Porque a sequência segue um padrão de vermelho, branco e azul.
[O aluno A faz a contagem tendo como referência o número 18 (vermelho) e segue dizendo que o 19 seria "branco" e aponta no início da sequência da fita a cor "Azul", representada pelo número 2 e continua contando: 20, 21, 22, 23, 24... Nesta tarefa, os alunos utilizam a própria faixa para a contagem, indo e voltando na sequência.]
A: ...46, 47, 48, 49, 50, 51...É azul.
Cid: Então, vocês perceberam alguma coisa?
F: Sim...
Cid: Vocês perceberam, então, que existe uma sequência e que, se eu não seguir o padrão, muda tudo?
F: Sim, porque é vermelho, branco e azul.
[Para encontrar a cor do 37, eles fazem a mesma dinâmica de contar usando a fita, vão e voltam na sequência de cores. Eles percebem que há diferença quando não se respeita a sequência padrão]

A e F utilizaram a contagem na fita para descobrir a cor do número 51 e também do 37. Para isso, iam contando diretamente na fita para saber a cor. No instante em que não consideraram a sequência das cores e foram direto para o vermelho, sem contar o azul, perceberam, a partir de minha intervenção, que realmente faltava algo e retomaram a contagem. Foi extremamente curioso observar A e F falando comigo, enquanto F, com a borracha na mão, apagava o que havia feito. Isso demonstra a força da presença da professora e, também, de suas reflexões. Em seguida, iniciamos a socialização.

Episódio 3 - Qual a cor do 51.º?

Cid: Qual é a cor do espaço 51?

Alunos: Azul...vermelho...branco... [anoto na lousa as conclusões]
Cid: Olha que interessante, precisamos da cor do 51 e temos 3 possibilidades de cores. O que podemos fazer para chegarmos numa conclusão só? Pois precisamos apenas de uma cor...
W: A gente foi do 17 até chegar no 51... [(áudio ruim) os alunos fazem o desenho dos quadradinhos e os pintam na sequência, até chegar ao51].
Cid: Alguém fez de um modo diferente?
A (da primeira dupla):Nós contamos do branco e depois pulamos para o vermelho...Daí, vimos que estava errado, porque tinha o 2 [azul]*... Daí, vimos que é vermelho o 51* [percebem que o 19 era branco e continuam contando a partir do quadrado 2, o azul, seguindo a sequência de cores].
Cid: Conte para a sala que estratégias vocês usaram?
B: Nós vimos aqui que era 18 [aponta para o fim da fita]. *Daí, contamos 19, 20, 21, 22, 23...* [Volta a contar, no início da fita, a partir da próxima cor da sequência.]
A: Contamos até o 51 e vimos que é o vermelho.
[Repito a estratégia da dupla para a sala].
I: Eu fiz diferente e deu azul, mas agora estou vendo que é vermelho, porque contei [utiliza os dedos para representar a contagem] vermelho, branco e azul, vermelho, branco e azul...até chegar no 51.
Cid: Vamos fazer esta estratégia juntos? Quantas vezes vamos contar?
X: 5 vezes e mais 1.
[Faço a contagem coletiva utilizando os dedos e registro na lousa:

10 V B A – V B A – V B A V
10 V B A – V B A – V B A V
10
10
10
1]

Cid: Eu preciso continuar escrevendo aqui para descobrir?
[A aluna X alerta para a marcação das letras, dizendo que alinha de baixo não começaria com V de vermelho novamente e sim com B de branco].
B: Todos terminam com V.
Cid:Hum...então seria vermelho no 50? Quando chega no 51 é azul?
B: O 1 começa com V; então, o 1 do 51 vai ser vermelho...
[Com as discussões, todos chegam a um consenso com a professora. Iniciam novamente, modificando os registros da lousa:

10 V B A – V B A – V B A V
10 B AV –B AV –B A V B
10 A V B – A V B – AV B A
10 V B A - V B A - V BAV
10 B A V -B AV – B A V
1A]

Será que vai ser Azul? Porque a dupla do R contou, e deu vermelho...
[Interrupção da gravação...]
[Retomo a discussão com os alunos, faço a contagem com os alunos e percebo que eles se esqueceram de incluir o 0. Sendo assim, o número 51 é vermelho.]
Cid: Vimos que não existe somente esta forma de descobrir a cor do 51...Existe o desenho e a contagem, mas temos que ficar atentos porque tem o 0.

I: Na contagem aqui na folha, deu azul, e no meu dedo eu contei o 0. Daí, vi que deu vermelho...
Cid: Qual é a cor do espaço do número 27?
Alunos: Branco.
Cid:Como chegaram a esta conclusão?
Alunos: Fazendo a mesma coisa.
X: Vimos aqui no desenho. [Interrupção da gravação...]
[Retomo a discussão com os alunos, faço a contagem com os alunos e percebo que eles se esqueceram de incluir o 0. Sendo assim, o número 51 é vermelho.]
Cid: Vimos que não existe somente esta forma de descobrir a cor do 51...Existe o desenho e a contagem, mas temos que ficar atentos porque tem o 0.
I: Na contagem aqui na folha, deu azul, e no meu dedo eu contei o 0. Daí, vi que deu vermelho...
Cid: Qual é a cor do espaço do número 27?
Alunos: Branco.
Cid:Como chegaram a esta conclusão?
Alunos: Fazendo a mesma coisa.
X: Vimos aqui no desenho.

Durante a troca de ideias, procurei registrar as respostas na lousa e, ao mesmo tempo, tentei ouvir as diferentes estratégias das crianças. Nessa tarefa, três duplas conseguiram indicar corretamente qual seria a cor do número 51 e a do 37.

A aluna M utilizou o caminho de contar nos dedos, dizendo: vermelho, branco, azul, vermelho, branco, azul etc. Quando M propôs esse movimento, tentei reproduzi-lo com a sala, mas, no decorrer da contagem, quando chegamos ao 51, vimos que parou na cor azul. Acabei ficando em dúvida, pois, de acordo com o que tínhamos visto, seria vermelho.

Meu objetivo, então, era pensar rapidamente em algo para discutir com as crianças o porquê do azul. Com o término da bateria da câmera, a professora que estava me ajudando na filmagem foi até a lousa e começou a numerar as letras, a fim de descobrir o porquê de o 51 ter dado azul ao invés de vermelho; para isso, iniciou a contagem a partir do 0 indo até o 51, fez o registro com pincel vermelho. Ao terminar a contagem, chamou-me e afirmou: “Olha aqui, você não contou o zero, por isso está dando diferença”.

Esse instante foi muito significativo para as crianças. Elas me questionaram como poderia ter esquecido do zero, um número tão importante. Porém, ao mesmo tempo, eu havia percebido que não tinha mais possibilidades de discussão, já que as marcações estavam na lousa e não haveria como prosseguir com a investigação.

Percebo o quanto de discussão perdi, pois, pela “ansiedade”, acabamos atropelando todo o processo que vínhamos construindo e que poderia ser ampliado ainda mais. Mesmo assim, foi interessante perceber como as crianças estavam envolvidas com a tarefa e não precisavam de mim para continuar debatendo, e foi o que aconteceu...

Ao terminar a tarefa, acompanhei a professora que estava me auxiliando até a porta. Quando retornei, deparei-me com o aluno A na lousa, com o pincel na mão, conversando com a sala. Parei na porta e perguntei o que estavam fazendo, e ele me disse que havia descoberto mais um segredo.

> Episódio 4 - De 10 em 10 é uma cor diferente!
>
> [Utilizando as numerações feitas na lousa, o aluno A faz uma explicação.]
> *A:Prô, você está vendo esses números? De 10 em 10 é uma cor diferente!*
> *Cid:Como assim A?*
> *A:O 10 é branco, o 20 é azul, o 30 é vermelho, o 40 é branco, o 50 é azul, o 60 vai ser vermelho, o 70 vai ser branco, o 80 azul, o 90 vermelho, o 100 branco e o 110 azul.*

O aluno A, mesmo sem minha presença, continuou conversando a respeito da sequência; isso foi extremamente positivo e surpreendente para mim. Conseguiu generalizar e propor outros números, desafiando a sala a pensar no 150, no 160, no 200 e no 1000. Quando começaram a utilizar números mais altos, perderam-se no registro, que estava sendo feito de 10 em 10. Esse conjunto de ações recuperou as discussões da socialização, pois, embora acreditasse que a tarefa tinha se perdido, percebi que, utilizando os números que estavam na lousa, os alunos conseguiram ampliar ainda mais suas reflexões.

A ANÁLISE DOS EPISÓDIOS FEITA PELO GRUCOMAT

Esse conjunto de episódios foi levado para o Grucomat, para o qual apresentei tanto a videogravação quanto a narrativa. Nas discussões do grupo, percebi que não consegui fazer questionamentos durante a socialização para que os alunos conseguissem se mobilizar no decorrer da tarefa e refletir sobre ela. Portanto, apesar de terem feito várias relações, principalmente ao final da atividade, faltava algo, faltava levantar outras hipóteses e validá-las. A professora Adair Nacarato e o professor Arthur Powell, presentes nesse dia, fizeram um questionamento semelhante, que pode ser reproduzido da seguinte forma: “que perguntas poderia ter feito e não fez para ajudar as crianças a avançarem?”.

Instigada por essa questão e pelas discussões no grupo, percebi que poderia repensar a tarefa e, ao mesmo tempo, refletir mais em torno dela. Com isso, a tarefa das fitas ganhou um novo significado para mim: tracei um novo percurso, e foi rumo a ele que decidi trilhar.

NOVO CAMINHO, NOVAS REFLEXÕES...

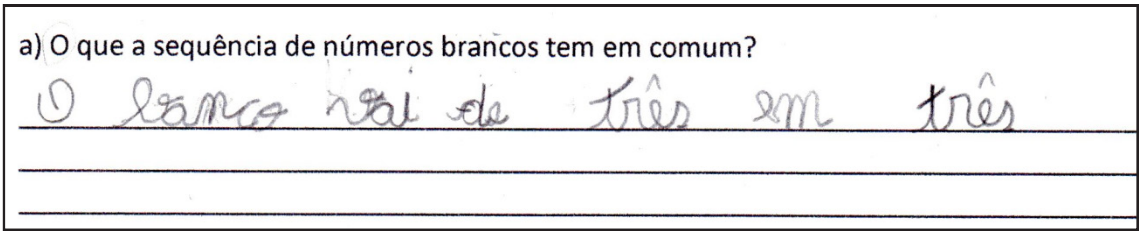
Em 2015 propus para uma nova turma de 3.º ano a mesma tarefa. A classe era composta por 30 alunos; nesse dia estavam presentes 29, organizados em 13 duplas e 1 trio. Entreguei as folhas das tarefas e disse a eles que íamos estudar padrões e também que tinha um segredo, como nas outras tarefas que propus. Fiz essas firmações, pois já havia trabalhado esse tema com a sala, com atividades elaboradas com o Grucomat ─ denominadas "O colar de contas" e "Os padrões geométricos" ─, com as quais se envolveram muito.

Ao solicitar às crianças que descobrissem esse segredo, o entusiasmo foi grande. Os alunos ficaram muito motivados ao saber que se tratava de uma tarefa investigativa e que poderiam argumentar, levantar hipóteses, discutir em grupos e socializar com todos e conjecturar. É a partir de situações como essa que um ambiente de investigações matemáticas acontece.

No decorrer da resolução, não surgiram dúvidas sobre a tarefa. Porém, a discussão foi extremamente produtiva entre eles, pois alguns argumentavam que a sequência seria de três em três e que as cores iam se alternando, outros ainda defendiam que todo número par seria vermelho (tomando como referência o zero) e que todo número ímpar seria branco (tendo o um como referência). A primeira hipótese foi derrubada por alguns estudantes que afirmavam que isso não daria certo nessa tarefa, já que havia três cores e não duas, como na primeira tarefa das fitas realizada por eles.

Na primeira pergunta que tratava da sequência dos números brancos, observo duas formas de resolução. A dupla L e R aponta que os brancos vão seguindo uma sequência de três em três, como demonstrado na Figura 1.

Figura 1 − Registro da dupla L e R

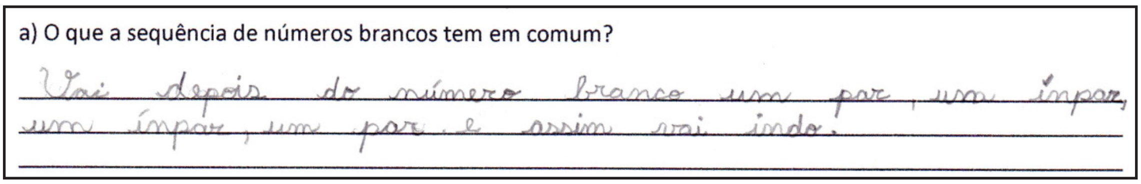

a) O que a sequência de números brancos tem em comum?

O lranco vai de três em três

Fonte: Arquivo da pesquisa

Já G e J e B e L consideram, em sua explicação, a sequência ímpar e par, como mostram a Figura 2 e a 3:

Figura 2 − Registro da dupla G e J


a) O que a sequência de números brancos tem em comum?

Vai depois do número branco um par, um ímpar, um ímpar, um par e assim vai indo.

Fonte: Arquivo da pesquisa

Figura 3 − Registro da dupla B e L

a) O que a sequência de números brancos tem em comum?

Porexemplo: o número 1 é inpar e o número 4 e par então eu pensei que já que o numero 1 é inpar e o numero 4 é par vai seguindo inpar par e asim vai indo

Fonte: Arquivo da pesquisa

Durante a socialização, esses registros foram retomados. A riqueza das discussões foi muito grande. Separei os momentos em cinco episódios.

Antes de abordar a questão *a*, que tratava das semelhanças entre os números brancos, discutimos sobre a organização da tira. O objetivo era sinalizar os números com características semelhantes e os números que estavam omitidos.

Episódio 1: analisando a tira colorida

R:É assim, prô: a sequência vai de três em três e continuando, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, cada um de uma cor.
Cid:Então você acha que o padrão é de 3 em 3?
O:É, também tem assim ó [apontando para fita] *1, 2, 3.*
Cid:0, 1, 2 e 3, é isso?
O:É, e no final vai indo sempre nessa sequência.
Cid:Mas foi fácil para vocês olharem essa fita e descobrir que número não tinham?
Ri:9, 10, 11, 12, 13, 14.
G:É isso mesmo.
Cid:Então G, o 9 é de que cor?
Alunos: Vermelho.
Cid:E o 10?
Alunos: Branco.
Cid:E o 11?
Alunos: Azul.
Cid:E o 12?
Alunos: Vermelho.
Cid:E o 13?
Alunos: Branco.
Cid:E o 14?
Alunos: Azul.
Cid:Então, foi fácil descobrir essa sequência? Como descobriram tão fácil assim?
R:Porque aqui [mostrando a fita] *tem uma continuação, vermelho, branco, azul.*
I:E aqui tem uma pontinha que é vermelho, aí continua vermelho, branco, azul, que para no azul, e aí continua, vermelho, branco, azul.
Cid:I você percebeu que tem uma parte que parece que está rasgada novamente? [retomando o que foi discutido na tarefa 1 das fitas, proposta anteriormente]. *O que isso indica, de acordo com o que conversamos?*
I:Que o número é infinito e continua.
D:[inaudível.]
Cid: [Retomo a fala do aluno D] *É que vocês não escutaram, mas o D disse assim: que olhando para o número 18, o número 0, ele percebeu que o vermelho é par e agora será mesmo que o vermelho é par?*
Alunos: Não.

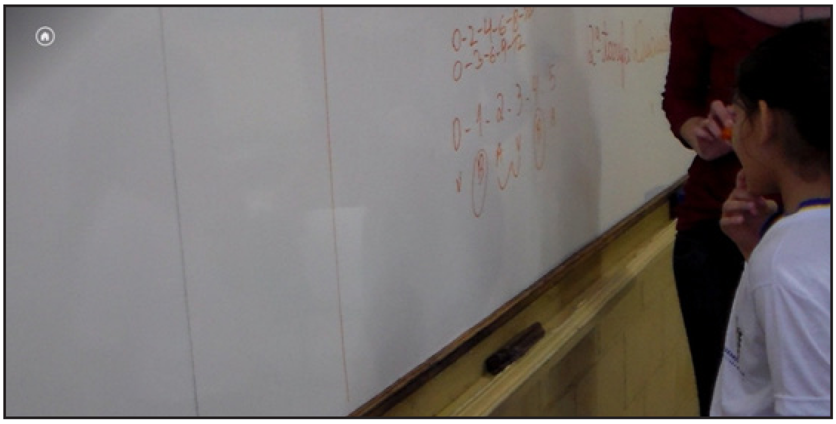
G:Não, é um par, um ímpar, par, ímpar...
I:É, vai assim, intercalando.
C:Então, o que o azul é?
G:É o que eu ia falar, é a mesma sequência, par, ímpar, par, ímpar...a mesma sequência que o vermelho só o branco que não, ele é ímpar, par, impar, par.

No decorrer da discussão, foram muito presentes as relações que estabeleceram com a tarefa 1, que foi realizada anteriormente e possuía apenas duas cores (os números pares seriam vermelhos e os ímpares brancos). Ao mesmo tempo, já iniciavam algumas hipóteses, afirmando que havia uma sequência, que o padrão mudava de três em três e que as cores estavam ligadas a essa mudança, ou seja, seguiriam a sequência vermelho, branco e azul.

A ausência dos números também foi algo tranquilo para os alunos. A aluna G já começava a refletir acerca dos vínculos entre os números pares e ímpares e as cores, afirmando: "*o azul é par, ímpar, par, ímpar...a mesma sequência que o vermelho, só o branco que não, ele é ímpar, par, impar, par*". A "mesma sequência" quer dizer que tanto o vermelho quanto o azul apresentavam numa série de números pares e ímpares, o que não acontecia com o branco, que seria ímpar e par e assim sucessivamente. Essas relações estabelecidas por G foram extremamente ricas para seguirmos a sequência dos números brancos.

Episódio 2: A sequência de números brancos
Cid: Deixe eu entender o que estão falando. Então, o vermelho é par, ímpar... o branco é ímpar, par... e o azul é par, ímpar...Então, o branco é diferente, porque começa primeiro com ímpar e depois o par, é isso? Legal, mas vamos ver, então, na primeira questão o que descobrimos até aqui: "O que a sequência de números brancos tem em comum?".
I:Que o branco vai com um número ímpar e depois um par e assim por diante.
G:E depois vai assim: depois de um número branco, vai um par e um ímpar, e depois do branco de novo [referindo-se ao número 4] *vai ímpar e par.*
Cid:Entendi, então depois de um branco vai um par e um ímpar, e depois um ímpar e um par. Vocês tinham percebido isso?
[D faz gesto que não. Novamente recupero a fala de G e indico na folha, utilizando a sequência da fita.]
Cid:E o que mais descobriram de segredos na sequência dos brancos?
A:O branco pula de dois em dois.
R:Não, é de três em três. [R vai até a lousa e escreve "0-1-2-3-4" e vai nomeando os números e as cores. Em seguida, percebe que seria de dois em dois e não de três em três].
G:Agora não entendo mais nada, ontem fizemos uma tarefa e que era [vai até a lousa e escreve: 0-2-4-6-8-10 e de 3 em 3 seria: 0-3-6-9-12].
*Cid:Mas o R não fez esse exemplo. [*registro na lousa 0-1-2-3-4-5, conforme a Figura 4]

Figura 4 − Registro feito pela aluna G



Fonte: registrado pela autora

> *G:Mas aqui* [apontando para sequência de um em um que fiz representando a tira] *que sequência é?*
> *Cid:Fiz de um em um, mas, como estamos falando a respeito dos brancos, teve que pular quantos números?*
> *G:Dois.*
> *Cid:Mas não que a sequência é de dois em dois, aqui a sequência é de um em um, mas pra vir um branco e um branco precisa pular dois números, é isso que o R quis dizer.*
> *G:Ah! Agora entendi.*

Durante este episódio, dois pontos foram discutidos: a sequência ia de dois em dois e a organização dela partia de números ímpares e pares. Porém, esse momento gerou muitas dúvidas para G, pois, para ela, a sequência era de três em três e não de dois em dois, como R afirmava. R, quando registrou, estava pensando na quantidade de algarismos que eram pulados entre um branco e outro, mas, para G, tal quantidade compreendia a relação de pares e ímpares, e não haveria possibilidade de ser de dois em dois, pois deste modo contabilizam-se os números pares e de três em três os ímpares. Se a sequência fosse de dois em dois, não haveria como seguir a relação que defendia ─ de números pares e ímpares ─, e sim apenas a de pares.

Esse momento foi importante em relação tanto às hipóteses criadas por R e G quanto à forma com que os dois alunos se entrosaram para refletir acerca de suas possibilidades. De forma conjunta e dialética, conseguiram argumentar, defender seus pontos de vista e, ao mesmo tempo, refutar algumas de suas hipóteses. A comunicação entre os alunos e minhas intervenções, que agora seguiam um rumo mais claro, integraram-se.

> **Episódio 3:** Quais os números entre 7 e 16?
> *Cid:Entre 7 e 16, quais números brancos existem?*
> *G:7, 10, 13, 16.*
> *Cid:G, entre o 7 e o 16.*
> *R:O 10 e o 13.*
> *Cid:G, quando falamos 7 e 16 ele não entra nessa contagem do entre. Mas ainda*

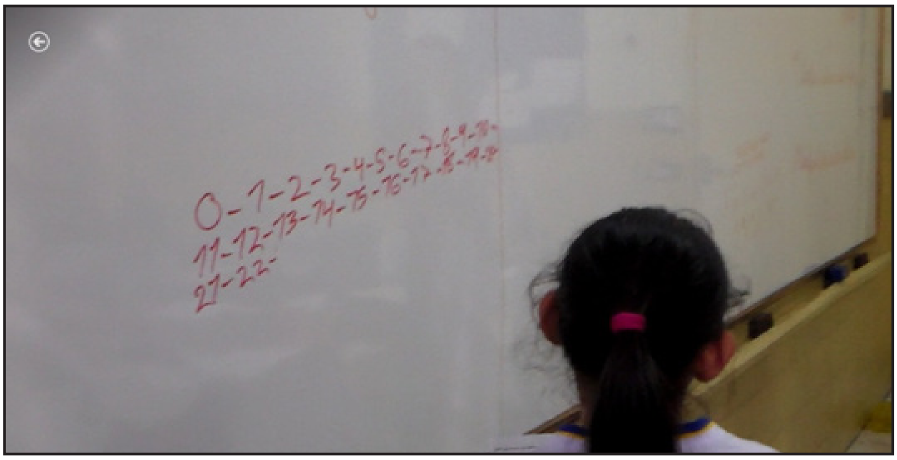
alguém pensou diferente disso?
D:Pensei no 10 e no 9.
Cid:E o que vocês acham pessoal?
G:O 9 não, porque o 9 é vermelho, olha o cantinho aqui.
Cid:Estamos pedindo o branco, D [vou até a mesa de D para ajudá-lo a perceber a cor]. *E no item c, o que a sequência de números vermelhos tem em comum?*
G:Vai indo assim: ímpar, par, par, ímpar. Depois do número vermelho, vai ímpar, par, depois o vermelho é par, ímpar.
Cid:Então, qual é a sequência do vermelho?
G:Depois do número vermelho vai indo par, ímpar, par, ímpar.

G inicialmente fica em dúvida em relação à palavra *entre* e inclui o 7 e o 16 em sua contagem. Quando questionada sobre a palavra, percebe que me referia ao intervalo entre esses dois números. Outro ponto destacado diz respeito aos números vermelhos: os alunos afirmaram que a sequência seria de ímpares e pares, e assim sucessivamente.

Episódio 4: Qual a cor do número 51?
Cid:Vocês conseguiriam descobrir qual é a cor do número 51? Como você descobriu?
[Várias crianças começam a falar sua resposta.]
Cid:Ouvi várias respostas, mas o que me chamou atenção é que alguns dizem que é vermelho, outros branco e outros ainda azul. Mas não podemos ter três respostas para essa pergunta.
[Peço a eles que sinalizem quem escreveu que é branco e lhes pergunto a justificativa].
A:Pensamos no número que termina, como é 51 e termina com um é branco.
G:Masesse não dá, porque são três cores.
A:Não tem nada a ver.
Cid:O que vocês acham pessoal?
A:Eu acho que o azul vai com o par, porque só tem ímpar e par e não tem mais outra coisa.
Cid:Será G que é isso?
G:Não é, o vermelho é par e o branco é ímpar.
F:Mas aqui na fita o um tá branco.
Cid:Mas é somente o um que está branco?
F:Não.
Cid:Então, como vocês me provariam isso?
Ron: O branco não é só ímpar, é par também, pois quando alguma coisa termina com um não dá para saber assim, porque tem outros números.
I:Então não é porque no branco também tem par.
R:Assim, prô, poderia fazer: vermelho, branco, azul, vermelho, branco, azul [...][e continua narrando a sequência].
G:Nós contamos assim ó: 18, 19, 20 e fomos indo até o 51, contando no dedo.
I:E fiz assim, o meu deu vermelho, aqui é branco [mostrando a parte rasgada da tira: azul, vermelho, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50 e 51. Utiliza a própria fita para ir contando, seguindo a sequência dos números].
Cid:Então você foi contando para descobrir que era o vermelho.
Ri: E eu, prô, fui contando nessa parte [legenda das cores] *e descobri que era branco.*

G:Prô, eu posso tentar provar na lousa se é vermelho mesmo?
Cid:Pode.
G:Eu vou provar de uma maneira.
[G vai até a lousa e começa a fazer os números, seu objetivo é trazer os números de 0 a 51 e contar: vermelho, branco, azul. Mas G poderia encontrar outro caminho...]

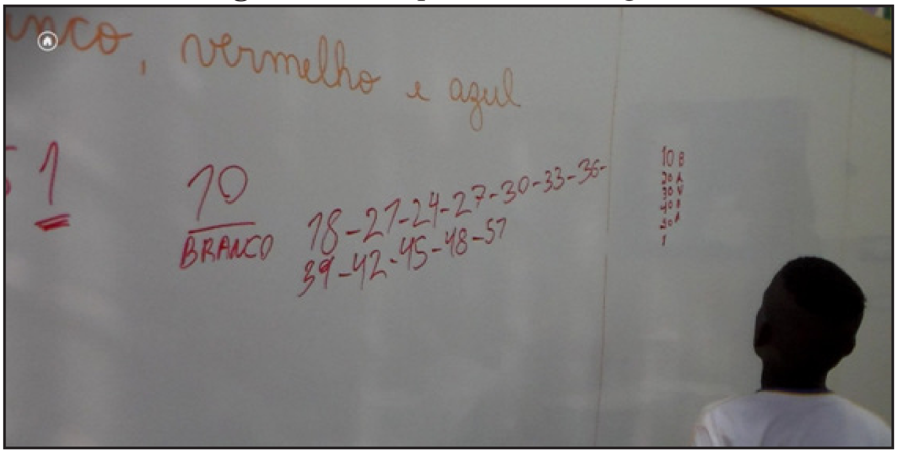
Figura 5 − Registro das primeiras estratégias da aluna G



Fonte: registrado pela autora

Cid:Vou te desafiar: você teria uma forma mais rápida de chegar a esse resultado? O que poderia fazer?
O:De 10 em 10.
Cid:E como você faria isso?
G:O 10 é branco.
O:Ou de 11 em 11 para ficar mais fácil o 1. 10 mais 10.
Cid:É 20, o 10 seria branco e o 20?
Ron: Azul.
[Peço para que represente isso na lousa].
I:Coloca apenas o b de branco, é mais rápido.
Ri: E o 30 será vermelho.
I:E 40 é branco.
Ri:50 é azul e o 1 é vermelho.
[G volta a registrar, porém de outra forma ...]
Ri: Ela tá indo de três em três, acho.

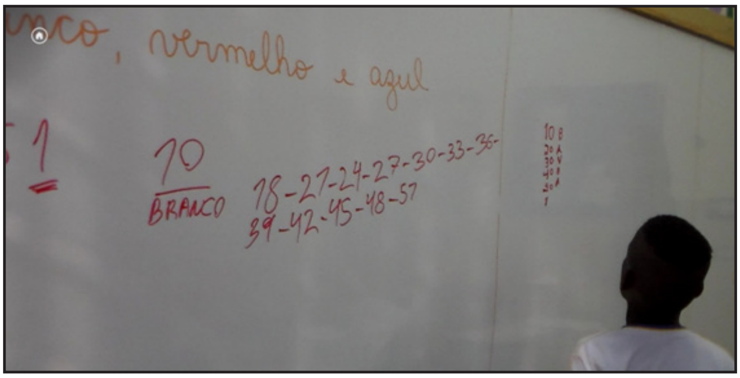
Figura 6 − G repensando seu registro



Fonte: Registrado pela autora

Cid:Mas porque você começou com o 18?
G:Tá aí eu provei que é vermelho. Porque o 18 tá aqui [mostrando a fita] *e é vermelho, depois o 19, 20 e o **21**, 22, 23, **24**, 25, 26, **27**, 28, 29, **30**, 31, 32, **33**, 34, 35, **36**, 37, 38, **39**, 40, 41, **42**, 43, 44, **45**, 46, 47, **48**, 49, 50, **51**.*[os números destacados em negrito são os vermelhos, pois G os enfatiza durante sua narração. Os números do intervalo, os que não estão destacados, foram apenas contados nos dedos; ao chegar nos vermelhos, encosta com o dedo indicador sobre o número na lousa, além de aumentar a voz].
*Cid:O, não seria interessante você deixar registrado também o que pensou? [*O registra o 10, e pergunto de que cor seria].
I:Coloca só a letra.
Cid:Ok I, vamos fazer isso O? [O registra 10B].
Cid:Ron e o 20? [O registra 20 A]
Cid:E agora Ri?
Ri: O 30 é vermelho. [O registra 30 V]
Cid:E agora O?
O:É 40.
Cid:E que cor é?
O:Branco. [Registra B, em seguida coloca 50 e A]
Cid:Faltou quanto?
G:1, o 51 é vermelho. Eu disse!
[O registra o 1 e o V]

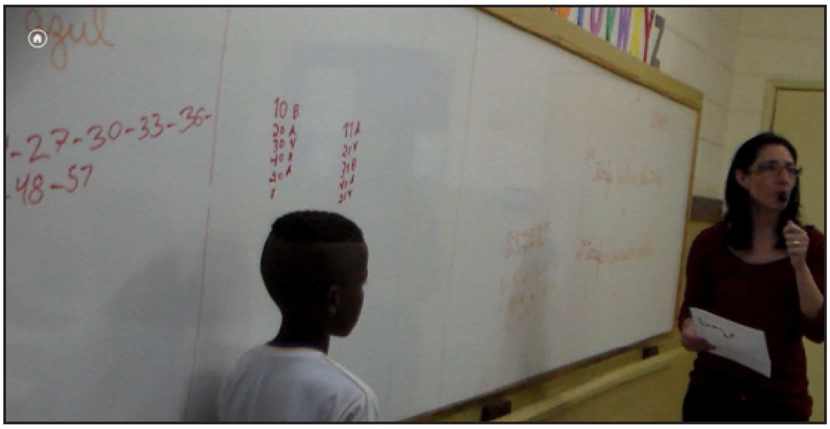
Figura 7 − Registro do aluno O



Fonte: Registrado pela autora

O:De 11 em 11 ia dar 51.
Cid:Bem, vamos fazer. O 11 seria que cor?
G:Azul. Agora vem o 21 que é vermelho, tá aí ó [se referindo a suas anotações na lousa].
Cid:E agora?
G:O 31 é branco, porque o 30 é vermelho, então o 31 é branco.
I:Depois vem o 41, prô, que é azul.
G:E o 51 é vermelho. [Enquanto isso, O realiza seu registro na lousa].

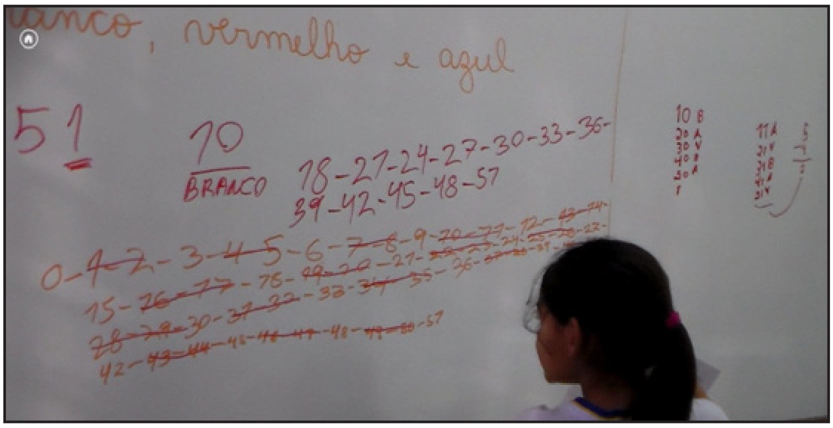
Figura 8 −Registro de novas estratégias do aluno O



Fonte: Registrado pela autora

Nota: Enquanto vários alunos, que já estão na lousa,discutem sobre os registros de O e tentam encontrar outras estratégias, G volta à lousa, a fim de encontrar outros caminhos para a resolução, pois N não tinha se convencido com os registros de G e de O e defendia que a cor seria branca e não vermelha.

Figura 9 − Registro da aluna G: momento de convencimento



Fonte: Registrado pela autora

[G. numera de 0 a 51 na lousa e risca os números que seriam branco e azul, deixando apenas os vermelhos em evidência.]
G:Eu fui contando até chegar no 18 e depois fui continuando. Então, nós [se referindo ao O R provamos que o 51 é vermelho.
Cid:E aí N, o que você achou?
N:Que não é vermelho, é branco.
G:Então N, faz do seu jeito pra mim ver.
[N começa a registrar na lousa de 10 em 10 até totalizar 50 e termina com o 1. N defendia que se olhar para o 10, que é branco, todo número 10 será branco]
G:Nem dá para olhar só o 0 porque tem três cores.
Percebo a importância de minha intervenção nesse instante.]
Cid:N que cor é o 10?
N:É branco.
Cid:E o outro 10?
N:É branco [e indica que os demais também são brancos].
Cid:Mas qual é a sequência de cores? Vermelho, branco, azul. O 10 é branco, mas o 20 é que cor? Azul, pois aqui 10 mais 10 é 20.
[Mesmo assim N não se convence. Peço para que registre comigo. Volto à contagem e mostro a ele que ─ apesar de ser de 20 em 20, como agora seria registrado ─o 20 seria azul e não branco. O 40 seria branco, o 50 seria azul e o 51 vermelho]

Várias foram as reflexões realizadas nesse episódio. Primeiramente observo que a defesa das crianças foi a de que não havia a possibilidade de conservar o último número do 51, pois, apenas observando o 1, não teria como apontar que seria ímpar, já que o branco possuía não apenas números ímpares, mas também pares, o que era muito enfatizado pela aluna G.

Ao longo dos registros, muitas estratégias foram feitas. G, *a priori*, buscava confirmar suas hipóteses sobre a cor vermelha, escrevendo todos os números e contando até chegar no 51. Porém, ao iniciar, propus que pensasse se haveria alguma outra forma mais rápida para resolver.

G ficou pensativa, enquanto O entrava na discussão e dizia a ela que a contagem poderia ser feita tanto de 10 em 10 quanto de 11 em 11. Ao registrar na lousa, O ainda estava um pouco inseguro, porém a cumplicidade de todo o grupo mobilizou O a refletir sobre a forma como poderia realizar essa contagem. Mesmo assim, o aluno pensava no registro de 11 em 11, já que, segundo ele, tratava-se de um número ímpar. Essa participação de O foi muito importante, pois o aluno conseguiu vencer suas inseguranças e ir até a lousa para conjecturar seus pensamentos.

G também procurou continuar seus registros e encontrar outros caminhos para a mesma resolução, foi quando decidiu partir do número 18 e evidenciar os números vermelhos. Porém, isso não seria suficiente, já que o aluno N ainda não havia se convencido de que o 51 poderia ser vermelho — segundo sua resolução, este seria branco. Mesmo a aluna utilizando outras possibilidades de resolução para explicar, N precisava compreender como esse processo estava acontecendo. Para isso, pedi que registrasse suas hipóteses, foi quando percebi que ele tinha feito de 10 em 10, mas se fixava sempre no 10 que seria, na fita, branco.

Como distribuiu 10, 10, 10, 10, 10, 1, não compreendia que 10 mais 10 seria 20 e, portanto, que a cor mudaria, sendo azul. Ele insistia em levar em conta apenas o 10 e sua cor na fita. Considero que esse momento foi extremamente rico para todo o grupo, mas principalmente para N, pois, ao recuperar seus registros e compartilhá-los com todos, pudemos perceber quais eram as justificativas e os caminhos utilizados por ele para obter essa resposta. Caso essa recuperação não tivesse sido feita, talvez a tarefa continuasse sem fazer sentido para N.

> **Episódio 5:** Qual a cor do número 37?
> *Cid:E a cor do número 37?*
> *G:* [Vai até a lousa, recupera sua contagem e mostra aos colegas que seria branco.]
> *R:* [Vai até a lousa e coloca 30 V e 7, vai contando nos dedos:31 branco, 32 azul, 33 vermelho, 34 branco, 35 azul, 36 vermelho e 37 branco]
> *I:* [Utilizando a legenda faz a contagem]31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 [apontando para as cores].

Neste episódio, é importante perceber o quanto as crianças utilizam diferentes estratégias para justificar suas resoluções, tendo como princípio identificar a cor e o motivo. Já integravam nossa prática em sala de aula a argumentação, o registro na lousa, a ação de sair do espaço das carteiras, enfim, o movimento corporal das crianças para se fazer compreender. Acredito que as tarefas investigativas são potencializadoras nas aulas de Matemática, pois elas conseguem fazer com que as crianças se aproximem dessa disciplina de forma extremamente singular, produzindo significados para a linguagem e para a elaboração conceitual.

APÓS A TRAJETÓRIA, A CHEGADA

> [...] a relação educativa, se constrói na dialética entre as convicções pedagógicas e as possibilidades de realizá-las, de transformá-las nos eixos reais do transcurso e da relação de ensino. (CONTRERAS, 2002, p. 198)

Essa trajetória de convicções, possibilidades e transformação me fez perceber que a aprendizagem se faz nessa dialogicidade entre professor e aluno e, ao mesmo tempo, entre professores nos grupos colaborativos, como o Grucomat. A participação no grupo me possibilitou repensar e discutir minha prática enquanto professora, o que ocorreu enquanto escrevia minha narrativa e compartilhava esta e as videogravações e enquanto analisava todo esse percurso com a tarefa das fitas. Tal oportunidade me fez acreditar ainda mais na importância dessa troca com docentes que enxergam a amplitude dos caminhos da Matemática, vendo-a como uma disciplina que proporciona reflexões, discussões e muito aprendizado.

Ao repensar a tarefa das fitas e as perguntas que poderia ter feito com os alunos no ano de 2014, voltei a analisar a tarefa e observei as possibilidades que ela oferecia, além das que propus naquele primeiro momento. Diferentemente dos caminhos percorridos, no 3.º ano para o qual lecionei em 2015 fiz pouquíssimas intervenções, em que deixei fluir as discussões entre eles, guiando-os e acompanhando-os em todos os rumos que eram tomados. Com maior segurança, percebia a constituição desse processo, dos alunos, de minha voz, de minhas intervenções, de meus objetivos, acreditando e confiando nas potencialidades das crianças. Embora essa crença já existisse em 2014, acredito que a socialização foi de certa forma comprometida, o que não gerou um avanço ainda maior.

As diferentes estratégias de resolução estiveram presentes. Os alunos utilizaram a contagem um a um, relacionaram os números às cores e, ao mesmo tempo, aos números pares e aos ímpares, fizeram a contagem de 10 em 10 e, ao compreender a organização do padrão, ousaram desenvolver a contagem de 11 em 11 e partir do 30, quando R explicou a cor do número 37. Além disso, compreenderam que não teríamos a possibilidade de relacionar a sequência par e ímpar com as cores, já que possuíamos três cores e não duas.

A circulação de ideias mobilizou toda a construção da escrita. Esta se revelou um processo de compreensão e validação de hipóteses, evidenciado por um caminho trilhado pela sala enquanto coletivo. Bakhtin (2000, p. 52, grifos do autor) afirma: “A ‘palavra do outro’ se transforma, dialogicamente, para tornar-se ‘palavra pessoal-alheia’ com a ajuda de outras ‘palavras do outro’, e depois, palavra pessoal (com, poder-se-ia dizer, a perda das aspas). A palavra já tem, então, um caráter criativo”.

Foi por meio desse movimento contínuo do pensamento e das linguagens que a experiência aqui narrada aconteceu.

REFERÊNCIAS

BAKHTIN, M. *Estética da criação verbal*. 3ª Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *As idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.

CONTRERAS, J. *A autonomia de professores*. Tradução Sandra Trabucco Valenzuela. 1a ed. São Paulo: Cortez, 2002.

KINDT, Martin; ROODHART, Anton. *Patterns and Figures*. *Mathematics in Context.*Chicago: Encyclopaedia Britannica, 2006.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, L.; CAÑADAS, M.C.; GUTIÉRREZ, J.; MOLINA, M.; SEGOVIA, I. (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática:* homenaje a Encarnación Castro. Granada, Espanha: Editorial Comares, 2013, p. 3-12.

STEPHENS, Max; RIBEIRO, Alessandro.Workingtowards Algebra: Theimportance of relational thinking.2012, 15 (3), p. 373-402, México.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *As idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa (coord.) *Padrões em Matemática:* uma proposta didática no âmbito do novo programa para ensino básico. Portugal: Texto Editores, 2011.

VAN DE WALLE, John. *Matemática no ensino fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

INVESTIGANDO PADRÕES E GENERALIZANDO: DESAFIOS AOS ALUNOS DO 4.º ANO

Carla Cristiane Silva Santos

Um dos saberes fundamentais à minha prática educativo-crítica é o que me adverte da necessária promoção da curiosidade espontânea para a curiosidade epistemológica (FREIRE, 1996, p.88).

COMO SURGE A NARRATIVA?

Sou professora, pedagoga recém-formada e, na época da escrita desta narrativa, aluna de mestrado em Educação, na linha "Educação, Sociedade e Processos Formativos". Cursava minha pós-graduação na Universidade São Francisco (Campus de Itatiba), e minha pesquisa estava vinculada ao Observatório da Educação (Obeduc). Ademais, era integrante do Grupo Colaborativo em Educação Matemática (Grucomat) desde 2013, no qual desenvolvi minha pesquisa de Iniciação Científica (IC) sendo esta narrativa um recorte desta.

Inicialmente gostaria de relatar como surgiu a pesquisa de IC. No último ano do Ensino Médio, em 2006, preparei-me para prestar o vestibular para o curso de matemática da USF, mas, quando olhei as inscrições, a faculdade tinha encerrado essa modalidade. Com isso, fiquei dois anos estudando para tentar entrar em uma federal e prestei alguns vestibulares. Tentativas frustrantes! Meus conhecimentos eram poucos para conseguir passar, pois tive uma defasagem durante a escolarização, já que, na fase inicial dos estudos, frequentei escola rural em uma cidade do estado de Minas Gerais. As salas de aula dessa escola eram compostas por duas séries, havia apenas uma professora para lecionar, e, claro, ela não dava conta.

Mesmo frustrada, ainda tinha o desejo de ser professora e, com a ajuda de uma grande amiga, fiz alguns testes de aptidão, enquanto isso dava aulas de matemática no quintal de minha casa para as crianças da rua. No teste, a Pedagogia se aproximou de meu perfil; então, prestei o vestibular para esse curso na USF em 2009. O primeiro semestre me assustou, pois não conseguia compreender as leituras e muito menos acompanhar as discussões em sala. Por problemas financeiros, tranquei a faculdade e fui morar com uma família em São Paulo para trabalhar como babá. Mas o desejo de ser professora era maior, e eu sabia que tinha potencial. Minha vontade era poder entrar em uma sala de aula e ensinar Matemática para crianças.

Em 2010 destranquei o curso e, com toda a garra, decidi me empenhar para realizar um grande sonho. Logo, apareceu a proposta de entrar no Pibid (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência), coordenado pelas professoras Luzia Bueno e Regina Célia Grando. Essa experiência foi fundamental para os primeiros contatos no chão da escola. Com o fim de meu vínculo ao Pibid, iniciei as disciplinas de metodologia da Matemática com a professora Adair Nacarato, que logo me convidou a fazer a Iniciação Científica no Grucomat. Com o convite, achei pertinente abandonar o Trabalho de Conclusão de Curso na área da linguagem e passar a fazê-lo na linha de Educação Matemática, sob a orientação da professora Regina Grando. A intenção era alinhar as duas pesquisas, cujos focos faziam parte de um grande sonho.

O envolvimento com o Grucomat enquanto realizava minha IC e meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi enriquecedor. O grupo estava pesquisando a respeito do ensino da álgebra nos anos iniciais. Comecei a estudar e fui me inteirando sobre o assunto para ir a campo. Em 2013, estava atuando como estagiária em uma escola da rede privada, no cargo de orientador de estudos, em três turmas (duas de 5.º ano e uma de 4.º ano), e tive a ideia de fazer parceria com a professora do 4.º ano. Meu trabalho consistia em desenvolver com esses alunos ─ que ficavam na escola em período integral ─ atividades diferenciadas que contribuíssem no rendimento deles nas aulas da professora.

Ao fazer referência às leituras das disciplinas de metodologia da matemática, às discussões do Grucomat e às experiências do Pibid, comecei a perceber como os professores dos anos iniciais tinham dificuldade de trabalhar a Matemática com os alunos. Notei que as aulas de matemática eram mecânicas, não existia diálogo e muito menos troca de ideias. As professoras da escola privada solicitaram minha orientação com relação à matemática. Com a junção da minha paixão e do envolvimento com os colegas da faculdade, começou a parceria com as professoras.

Os objetivos dessa parceria, da pesquisa de Iniciação Científica e do trabalho no Grucomat se apoiaram em algumas pesquisas voltadas ao ensino da álgebra nos anos iniciais. Destaco a pesquisa de Vale (2006) desenvolvida com estudantes em Portugal, cujos resultados evidenciaram que o uso de padrões nos anos iniciais do Ensino Fundamental pode contribuir para a compreensão dos alunos sobre a generalização em Matemática. Segundo a autora, os padrões permitem construir e ampliar o pensamento matemático, dando a este um significado.

Considerando as diversas abordagens que procuram fazer as definições da Matemática e tomam como base o uso dos padrões, noto a importância deste em sala de aula. A partir das leituras dos estudos de Vale (2006) e de outros autores, acredito que a criança desenvolve o pensamento matemático por meio da inserção e da compreensão dos padrões que norteiam essa ciência. Esse desenvolvimento é processual e emerge das experiências com atividades que contemplam a percepção de regularidades e o estabelecimento de relações. Portanto, a descoberta de regularidades nos padrões irá mediar o avanço do conhecimento matemático na criança.

Mundy, Lappan e Philips (1996 apud VALE, 2006) apontam que o modo como a criança vai generalizar e representar o saber nas explorações feitas nas investigações de padrões será constituinte do pensamento algébrico. Com isso, pode-se dizer que a maneira como é articulado o conhecimento matemático é oriunda da álgebra.

Levando em conta a mencionada importância dos padrões, pretendo compartilhar um recorte de como foi a pesquisa com a turma do 4.º ano, composta por 32 alunos de 8 e 9 anos e integrada a uma escola privada do município de Itatiba. Ao tomar o ensino da álgebra a partir de tarefas investigativas de padrões matemáticos, busco mostrar o quanto as situações com esse caráter contribuem para a argumentação em sala de aula, para as trocas de ideias, e o quanto a postura do professor ajuda na construção desse diálogo. Procuro, principalmente, expor indícios de generalização algébrica nesses discursos.

AS TAREFAS

Para introduzir o uso de padrões nas aulas, foram pensadas duas tarefas envolvendo atividades corporais (tarefas 1 e 2) e uma de natureza repetitiva sobre regularidade (tarefa 3). Vale ressaltar que as tarefas foram criadas e adaptadas pelo Grucomat – elas são expostas nos Quadros1, 2 e 3.

Quadro 1 − Tarefa 1: Montar uma fila

As crianças serão dispostas em uma fila que tenha um padrão: uma criança em pé e outra abaixada; uma menina em pé e um menino sentado; uma criança sentada, uma em pé e uma ajoelhada (fica a critério do professor quais as posições adotadas). O professor propõe ao restante da turma: "Como continuar a fila? Quem sabe o segredo da fila?". O professor chama uma criança, pede para que entre na fila e pergunta a ela: "Como você ficaria ao entrar na fila?".

Fonte: Criado e adaptado pelo Grucomat

Quadro 2 − Tarefa 2: Descubra o segredo

Duas crianças ficam fora da sala de aula. As crianças na turma inventam uma organização para a fila. Apenas algumas crianças são dispostas em fila, segundo o segredo. As crianças que estavam fora entram na sala e tentam descobrir o segredo, colocando as demais crianças na fila.

Fonte: Criado e adaptado pelo Grucomat

Quadro 3 − Tarefa 3: Montando um cordão

Continuar o padrão: 1 conta azul no barbante e, em seguida, 1 vermelha, depois 1 azul, 1 vermelha, assim sucessivamente. Parar quando tiver colocado 13 contas. *a) Como poderíamos continuar o padrão? Registre como você pensou.* *b) Qual será a cor da 20.ª conta? Explique como você sabe disso.* *c) Qual será a cor da 37.ª? Explique como você sabe disso.* *d) Como você faria para descobrir a cor da conta em uma posição qualquer?*

Fonte: Criado e adaptado pelo Grucomat

INVESTIGANDO PADRÕES MATEMÁTICOS COM ALUNOS DE UM 4.º ANO

Nas seções que seguem, narro como ocorreu a realização das tarefas mencionadas. Primeiro, trato, em conjunto, das tarefas 1 e 2. Logo, discorro sobre a terceira tarefa.

RELATOS DAS TAREFAS 1E 2

Na realização da primeira das tarefas corporais, em 7 de abril de 2013, acompanhei a professora de um 4.º ano, como já afirmado anteriormente. Nesse dia, ela dirigiu-se com os alunos para um ambiente externo à sala de aula. Organizou-os sentados, escolheu um aluno por vez e iniciou a montagem da primeira fila — uma criança em pé (menina) e outra sentada (menino) —, seguindo uma sequência regular das posições escolhidas por ela. Logo, pediu que os demais alunos observassem o que ela estava fazendo para que pudessem descobrir o segredo.

No desenvolvimento da segunda tarefa, constatamos que os alunos começaram a entender os padrões. De início, quando solicitado pela professora, o grupo escolhido para montar a própria sequência se baseou nas estratégias da fila que a professora montou na tarefa 1. A docente ia questionando os alunos sobre o tipo de sequência que estavam montando. Notei que, a partir das perguntas da professora, as crianças começaram a pensar em outras possibilidades, algumas exageraram no tamanho do motivo da sequência padrão.

Os estudantes discutiram muito entre eles, montando e desmontando a fila. Logo, chegaram à conclusão de qual seria o segredo. A professora intervinha dizendo que o grupo poderia considerar a posição do corpo e a disposição “meninos e meninas” na sequência. A fila foi formada com uma menina de costas, uma menina de frente, um menino de costas e uma menina de frente. Feita a fila, a professora chamou os três alunos que estavam escondidos, em outro local da escola, para descobrirem o segredo e continuá-la. Eles observaram a fila e logo pegaram uma menina para iniciar a repetição, pois descobriram o segredo.

Professora: Tem que ser uma menina ou você quer que seja?
Aluno x: Eu quero que seja, professora.

> [Ao terminar a construção da fila, perceberam que algo estava errado, pois tinham apenas respeitado o valor posicional do corpo e não consideraram a disposição meninos e meninas na sequência de padrão regular.]
> *Professora: Observem o início da fila novamente e estudem a posição corporal e disposição de cada coleguinha. Vocês acham que podem escolher menino ou menina para cada posição, ou tem que ser?*
> *Todos: Tem que ser, professora*

Em outra aula, a professora solicitou aos alunos que fizessem um relatório das observações que eles tinham feito sobre as duas tarefas e de suas impressões a respeito delas. Esse registro será meu objeto de análise. Seguem as anotações de meu diário de campo ─ caderno em que descrevi todo o movimento da pesquisa de IC e em que, principalmente, transcrevi os diálogos que emergiram ─ relativas aos discursos dos alunos na experiência com as tarefas 1 e 2:

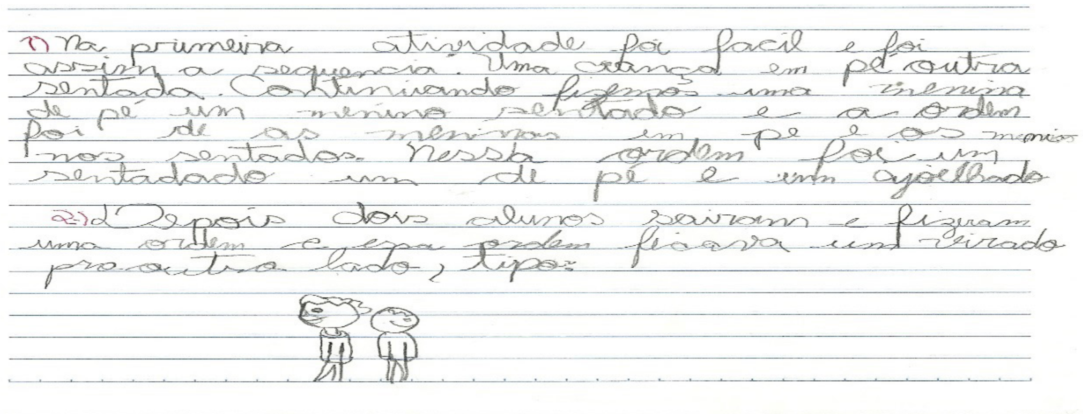
> *Professora: Marcelo, qual é o segredo da fila?* [O aluno observou a fila, enquanto alguns estudantes, que também a analisavam, falavam o segredo da sequência eufóricos.]
> *Marcelo: Ah, professora, tem uma criança em pé e outra sentada.*
> *Pedro: Não professora, o segredo é uma menina em pé e um menino sentado, segue uma sequência nessa ordem.* [Todos concordaram com essa colocação.]
> *Professora: Hum... Então, vocês me dizem que o segredo é a posição em pé sentado e a disposição de menina e menino?*
> *Crianças: Sim!*
> *Professora: Marcelo pegue alguns colegas que estão sentados e continue a sequência conforme o segredo que vocês descobriram.* [Marcelo pegou os colegas e montou a fila, respeitando a sequência de padrão regular que se repetia. Em seguida, a professora montou outra fila de meninos, sendo um sentado, um ajoelhado e outro em pé.]
> *Professora: Qual segredo para essa sequência?*
> [A maioria das crianças respondeu imediatamente o segredo, utilizando as palavras padrão, sequência, ordem para justificar suas respostas.]

No desenvolvimento da segunda tarefa, na qual a professora solicitou que duas crianças se escondessem e escolheu uma para ficar de vigia para que os demais montassem uma fila com um segredo que elegessem, notei que houve uma interação geral entre todos os alunos, que discutiram as estratégias com grande envolvimento, utilizando termos matemáticos, o que indicava indícios de apropriação conceitual. De início, quando solicitado pela professora, o grupo selecionado para montar a própria sequência se baseou nas estratégias da primeira fila que a professora montou, representando o mesmo encadeamento. Com as intervenções da docente, os alunos foram problematizando suas ideias, e o grupo criou a sequência que se repetia, constituindo uma lei de formação regular. A docente questionou: "*Vocês não acham que está muito fácil de descobrir esse segredo?*".

Como a tarefa previa o uso de registro, na aula seguinte, como já indicado, a professora pediu aos alunos que fizessem um relatório. Seguem três registros elaborados pelos alunos (Figuras 1, 2 e 3) em dupla, após vivenciarem as dinâmicas corporais e a socialização coletiva das tarefas.

Em seguida, faço algumas análises e reflexões teóricas sobre os registros escritos dos alunos e sobre minhas anotações do diário de campo. Esses registros foram escolhidos dada à representatividade no conjunto de anotações dos alunos, pois a partir deles consigo me debruçar sobre os discursos que mostram se os alunos fazem generalizações.

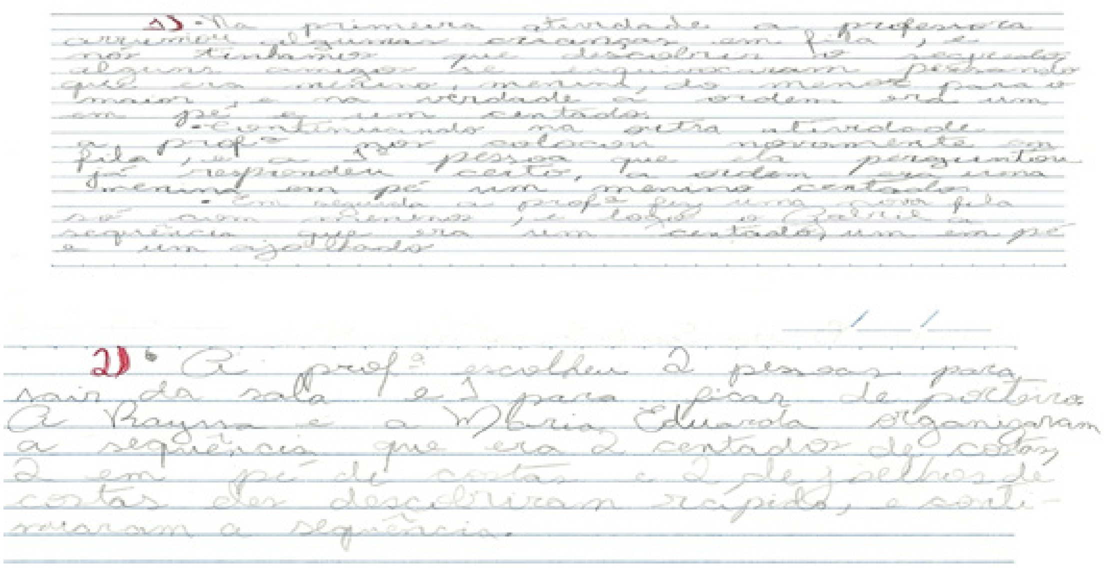
Figura 1 – Registro sobre a sequência corporal (dupla 1)



1) *Na primeira atividade foi fácil e foi assim a sequencia. Uma criança em pé outra sentada. Continuando fizemos uma menina de um menino sentado e a ordem foi de as meninas em pé e os meninos sentados um de pé e um ajoelhado.*
2) Depois dois alunos saíram e fizeram uma ordem e essa ordem ficava um virado pro outro lado, tipo:

Fonte: Fotografado e transcrito pela autora

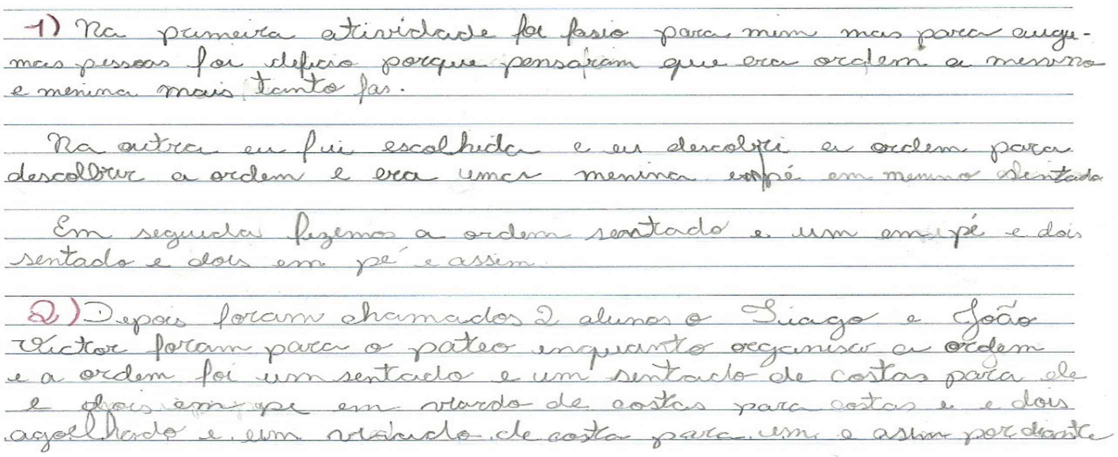
Figura 2 – Registro sobre a sequência corporal (Dupla 2)



1) *Na primeira atividade a professora arrumou algumas crianças em fila, e nós tínhamos que descobrir o segredo, alguns amigos se equivocaram pensando que era menino, menina, do menor para o maior, e na verdade a ordem era um em pé e um centado. Continuando na outra atividade a prof.ª nos colocou novamente em fila, e a 1.ª pessoa que ela perguntou já respondeu certo, a ordem era uma menina em pé um menino sentado.Em seguida a prof.ª fez uma nova fila só com meninos, e logo o Gabriel a sequência que era um sentado, um em pé e um ajoelhado.*
2) A prof.ª escolheu 2 pessoas para sair da sala e 1 para ficar de porteiro. A Rayssa e a Maria Eduarda organizaram a sequência que era 2 sentados de costas, 2 em pé de costas e 2 ajoelhados de costas eles descobriram rápido, e continuaram a sequência.

Fonte: Fotografado e transcrito pela autora

Figura 3 – Registro sobre a sequência corporal (Dupla 3)



1) Na primeira atividade foi fasio para mim mas para algumas pessoas foi dificio porque pensaram que era ordem a menino e menina mais tanto faz.

Na outra eu fui escolhida e eu descobri a ordem para descobrir a ordem e era uma menina em pé em menino sentado.

Em seguida fizemos a ordem sentado e um em pé e dois sentados e dois em pé e assim.

2) Depois foram chamados 2 alunos o Tiago e João Victor foram para o pátio enquanto organizou a ordem e a ordem foi um sentado e um sentado de costas para ele e dois em pé em virado de costas paras costas e dois ajoelhados e um virado de costas para um e assim por diante.

Fonte: Fotografado e transcrito pela autora

Na tarefa 1, o modo como a professora interveio nas argumentações contribuiu para que as crianças se apropriassem do conceito de padrões que se repetem. Os alunos tomaram a tarefa como uma brincadeira desafiadora e, devido ao caráter lúdico da sequência, foram motivados a descobrir o segredo. Diversas crianças queriam construir padrões envolvendo muitos estudantes (6 alunos diferentes, por exemplo) e, ao tentar montar a fila, percebiam que, quanto menor fosse o padrão de repetição, mais fácil seria formar a fila. Foi interessante a interação entre os alunos, estes palpitavam e levantavam hipóteses das possíveis repetições. Eles faziam generalizações ao relacionar quantidades, posições e disposição.

Nos registros das tarefas, a professora solicitou que eles colocassem as facilidades e as dificuldades que tiveram no dia de aula. Essa dinâmica de registrar é cultura da escola, em todos os anos os alunos possuem um caderno específico para essa prática, a qual é feita com a orientação da professora, em termos de linguagem.

Por meio das interações na sala de aula e da análise dos registros, notei que, na fala das crianças, a palavra *sequência* foi bem utilizada. Alguns usaram o termo *padrão* como referência. Foi enfatizado para os alunos que eles teriam que descobrir o segredo da fila, o que realizaram tranquilamente, fazendo afirmações como: "*Uma em pé, outro sentado...*".

Na tarefa 2, as crianças trabalharam dois contextos: a posição e o critério ─ menino e menina. Ficou uma menina de frente, outra de lado e um menino sentado. As crianças demoraram a montar esse padrão, discutiram muito, mas chegaram ao padrão da sequência. O tempo passou rápido, mas os alunos produziram muito, ficaram envolvidos na situação da tarefa.

Os alunos escolhidos para se esconder foram os que a professora considerou que teriam dificuldade para obter a solução. A intenção foi que eles pensassem e discutissem sobre ela. Não seria significativa a escolha de alunos que respondessem com facilidade. Os dois alunos partiram para a tentativa e erro, debateram muito e chamaram um menino para continuar a sequência. A professora questionou: "*Vocês querem chamar um menino ou tem que ser um menino?*". Eles responderam que queriam chamar um menino, não haviam percebido qual era o padrão que formava a fila. Os alunos envolvidos não davam dicas e não sopravam o segredo, queriam que a dupla descobrisse sozinha qual era o padrão.

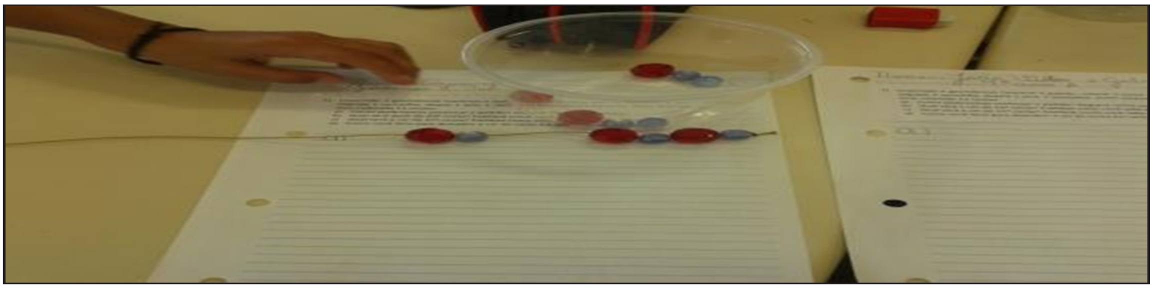
Mason (1996 apud VALE, 2006) afirma que o "ver" é um componente importante na generalização e deve ser o primeiro passo na exploração do padrão. Portanto, o professor precisa fazer a mediação entre a tarefa e o aluno, ajudando-o a fazer generalizações baseadas nas propriedades perceptíveis das figuras. Ao olhar, analisar e refletir sobre o que estava vendo, a dupla acabou chegando à conclusão de que tinha que ser necessariamente um menino para que fosse dada continuidade à sequência. O questionamento "por que tem que ser um menino?" favoreceu para que os alunos pensassem e descobrissem a lei de formação. Isso evidencia a importância das intervenções adequadas da professora.

Nos registros, destaca-se um vocabulário que começa a fazer sentido aos alunos, por exemplo: sequência e ordem – indicando a posição de cada elemento da sequência. Nacarato, Passos e Mengali (2009) descrevem que as escritas expressivas em determinados registros permitem que os alunos demonstrem as crenças particulares e as relações afetivas que têm com a matemática. O ato de registrar também possibilita que os alunos construam suas aprendizagens de forma contínua e reflitam sobre elas, facilitando o processo de avaliação e diagnóstico feito pelo professor.

RELATOS DA TAREFA 3

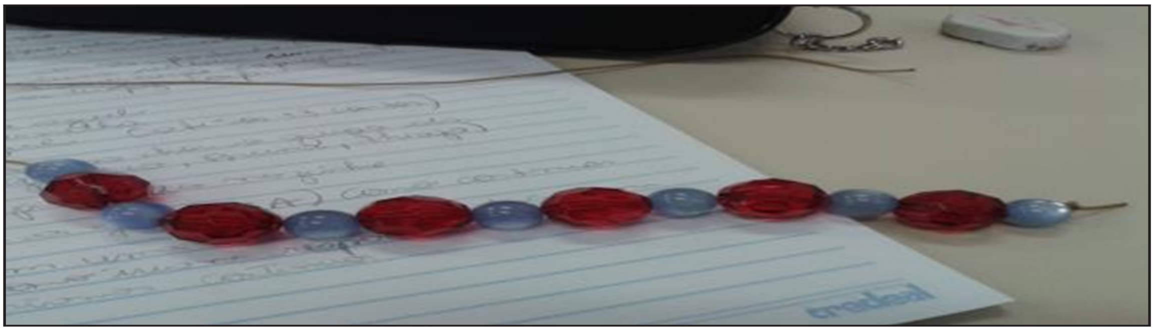
A terceira tarefa foi realizada no dia 11 de abril de 2013. A professora organizou os alunos em grupos de quatro e disponibilizou para cada grupo os seguintes materiais: um potinho com 13 contas (cores azul e vermelha) e um cordão de silicone para a montagem das sequências. Concluídos os cordões, os estudantes foram separados em duplas para a realização do registro. Essa organização teve como objetivo possibilitar uma maior interação na elaboração do registro; isso porque, trabalhando em pares, necessariamente os participantes trocam ideias entre si sobre a melhor forma de produzir o registro.

Figura 4 – Imagem de um grupo montando o fio de contas



Fonte: Fotografado pela autora

Figura 5 – Imagem de um fio de contas já montado



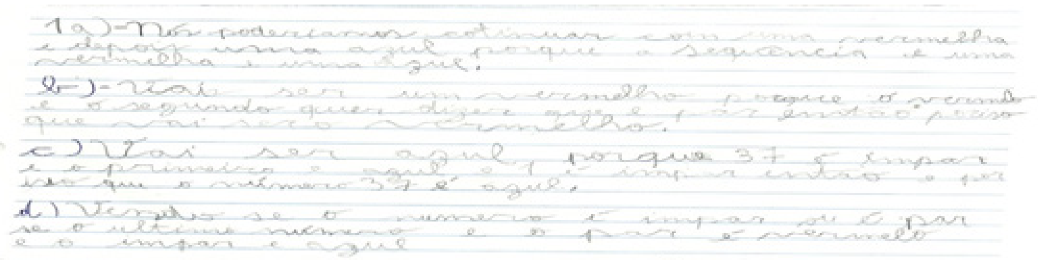
Fonte: Fotografado pela autora

Segue a transcrição dos diálogos com as duplas Tomaz/Gabriel e Beatriz/Eliza durante a realização da tarefa 3 e alguns registros escritos das crianças. Logo, realizo minhas análises e reflexões.

> [O aluno Tomaz fez a leitura do item a em voz alta]
> *Gabriel: Ah, essa é fácil, tem que ser vermelha a próxima pedra.*
> *Pesquisadora: Por que tem que ser vermelha?*
> *Tomaz: Porque ia continuar com uma vermelha, porque a sequência é uma azul, uma vermelha, uma azul, uma vermelha...porque termina com uma azul, por isso tem que ser vermelha.*
> *Gabriel: É, e também porque começou com uma azul.*
> *Pesquisadora: E vocês Beatriz e Elisa, como responderam no item a?*
> *Beatriz: É vermelha, porque, se termina com azul, e o jeito é azul e vermelha, aqui tem que ser vermelha.*
> [Em seguida a professora fez a leitura do item b com a sala, e as duplas refizeram a leitura entre si, acompanhadas da pesquisadora.]
> *Gabriel: Ah, é óbvio que vai ser vermelha!*
> *Pesquisadora: Hum... me explica porque acha que a 20.ª é vermelha?*
> *Gabriel: Porque, se começou com azul e terminou com o número "par", vai ser vermelho, porque começou com o azul.*
> *Pesquisadora: Mas o azul é par ou ímpar?*
> *Gabriel: É ímpar, porque um é ímpar e o dois é par... Daí, todos seguem o exemplo.*
> *Pesquisadora: E a 20.ª conta vai ser par?*
> *Gabriel: É par... o 2 é par, porque, juntando os números, eles podem ficar juntos* [fez o gesto com a mão] *e o 3, quando junta, sobra 1... Então, 20 é par.*
> *Pesquisadora: Você diz que o 20 é par, mas por que ele é vermelho?*
> *Gabriel: Ah, porque, nesse caso, a bolinha vermelha representa os números pares.*

Pesquisadora: Beatriz, a conta 20 é vermelha ou azul?
Beatriz: É vermelha, porque, como o Gabriel falou, o 1.º é ímpar, então, o 20 é vermelho, porque é par.
Tomaz: Ou podemos fazer assim: [demonstrou no cordão]*: marca o azul até chegar no 20.*
[A professora fez a leitura do item c com a sala, e eu a refiz com as duas duplas]
Tomaz: Vai ser azul porque é igual a anterior, a primeira é azul, e 1 é ímpar; então, 37 é azul.
Pesquisadora: O 37 é ímpar ou par?
Tomaz: O 37 é ímpar, por isso que é azul...vamos dizer que o 7 é ímpar.
Gabriel: [Contou no cordão] *1 ímpar, 2 par, 3 ímpar, 4 par, 5 ímpar, 6 par, e 7 ímpar...o 30 é par e se juntar ímpar par com ímpar vai dar número ímpar.*
Tomaz: É professora, usamos o 7 porque a unidade é o que conta, pode ter 1 trilhão de números e, se tiver uma unidade ímpar, o número todo vai ser ímpar.
Pesquisadora: Muito bem, meninos, e vocês, meninas?
Elisa: Será azul, porque no 37 o ímpar é o único que importa.
Beatriz: É, porque, no barbante, o número 7 no barbante [indicou com o dedo] é ímpar e azul; sendo assim, o 37 é azul.
[A professora fez a leitura do último item, e, logo após, reli-o com as duplas].
Beatriz: Descobrimos vendo se o número é ímpar ou par. Se for par, vai ser vermelho; e, se for ímpar, vai ser azul.
Elisa: Tipo o 1 que é ímpar e o 4 que é par [indicou a posição das contas no cordão].
Pesquisadora: E vocês, meninos, como saberiam a cor de qualquer número?
Gabriel: Se 1 é ímpar e o 4 é par, o 5 vai ser ímpar de novo. E, se o 105 o último número é 5, vai ser azul, porque é ímpar.
Pesquisadora: Existe outra forma de descobrir sem ser essa?
Gabriel: Tirando esse modo, não!
Tomaz: Eu acho que sim!
Pesquisadora: Qual seria Tomaz?
Tomaz: Meio embaralhado... Por exemplo: o número 251 você tira 250; daí, vai dá 1 ...e o número 1 que está no cordão é o azul, então 251 é azul...

Figura 6 – Registro da dupla (Tomaz e Gabriel)



a) Nós poderíamos continuar com uma vermelha e depois uma azul porque a sequência e uma vermelha e uma azul.

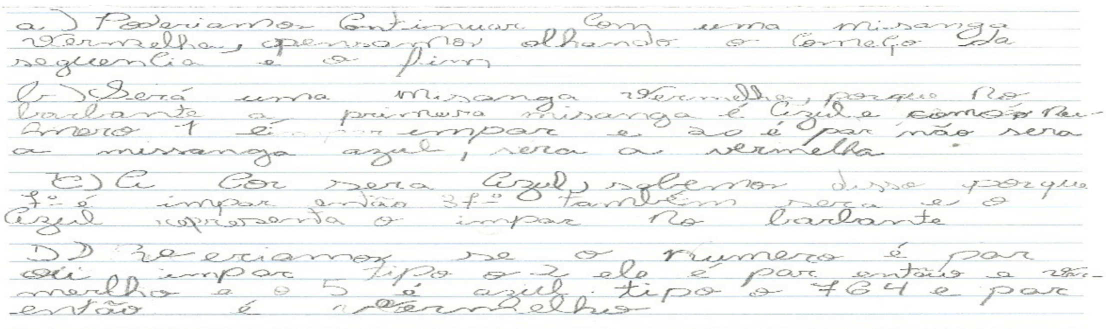
b) Vai ser um vermelho porque o vermelho e o segundo quer dizer que é par então porisso que vai ser vermelho.

c) Vai ser azul porque 37 é ímpar e o primeiro e azul e 1 é ímpar então e por isso que o número 37 é azul.

d) Vendo se o numero é ímpar ou é par se o último número e o par é vermelho e o impar e azul

Fonte: Fotografado e transcrito pela autora

Figura 7 – Registro da dupla Beatriz e Elisa



a) Poderiamos continuar com uma misanga vermelha, pensamos olhando o começo da sequencia e o fim.

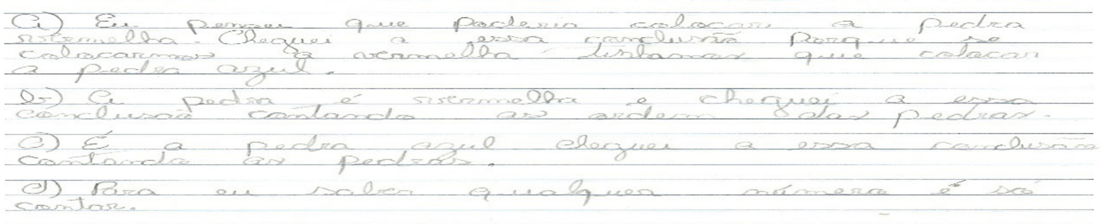
b) Será uma misanga vermelha, porque no barbante a primeira misanga é Azul e como o número 1 é ímpar e o 20 é par não será misanga azul, será a vermelha.

c) A cor será azul, sabemos disso porque 7 é ímpar então 37.º também será e o azul representa o ímpar no barbante.

d) Veríamos se o número é par ou ímpar tipo o 2 ele é par então e vermelho e o 5 é azul tipo 764 e par então é vermelho.

Fonte: Fotografado e transcrito pela autora

Figura 8 – Registro das alunas Ana e Alice



a) Eu pensei que poderia colocar a pedra vermelha cheguei a essa conclusão porque se colocarmos a vermelha tínhamos que colocar a pedra azul.

b) A pedra é vermelha e cheguei a essa conclusão contando a ordem da pedra.

c) É a pedra azul cheguei a essa conclusão contando as pedras.

d) Para eu saber qualquer número é só contar.

Fonte: Fotografado e transcrito pela autora

Os registros da tarefa 3 (Figuras 6, 7 e 8) evidenciam o quanto as crianças rapidamente se apropriaram da noção de padrão e identificaram o padrão da sequência dada com a ordem dos números ímpares e pares. Tomaz e Gabriel utilizaram uma estratégia específica para determinar que 37 é ímpar. Por meio da posição da conta no colar, essa dupla chegou à decomposição, seguindo esta lógica: 30 é par, e 7 é ímpar; a soma de um número par e de um ímpar resulta em um ímpar; portanto, 37 é ímpar.

Rojano Wilder (2002 apud SARAIVA; PEREIRA; BERRINCHA, 2010) descreve a construção mental da regra geradora dos termos da sequência como uma das fases do processo de generalização. Para o autor, esse é um processo mental que ocorre, por exemplo, quando o aluno é capaz de obter qualquer termo de uma sequência sem ter necessidade de calcular consecutivamente todos seus termos até chegar ao resultado buscado.

Embora eu só tenha acompanhado um grupo e seus participantes tenham conseguido chegar à generalização, é importante destacar que nem todos os alunos conseguiram alcançá-la. Destaco, por exemplo, o registro das alunas Ana e Alice (Figura 8): "Para eu saber qualquer número é só contar". Essa dupla ainda permanece na estratégia da contagem. Mesmo para a descoberta de posições mais avançadas da sequência, como a 37.ª, ainda há a convicção de que a contagem é suficiente. Isso evidencia o quanto uma sala de aula é heterogênea e o quanto os alunos têm tempos diferentes de apreensão dos conceitos, o que requer um trabalho contínuo por parte do professor. Vale ressaltar que esses registros foram socializados e que os alunos que não conseguiram usar a ideia do ímpar-par tiveram a oportunidade de pensar sobre as estratégias dos colegas.

Kaput (1999 apud VAN DE WALLE, 2009) pondera que o pensamento se manifesta quando existe espaço para a argumentação na sala de aula. Segundo o autor, a socialização estabelece generalizações sobre dados e relações entre um conhecimento e outro, desenvolvendo uma linguagem cada vez mais formal.

Van de Walle (2009), por sua vez, assinala que o objetivo da tarefa deve ser alinhado com a socialização e a intervenção direta do professor no conceito implícito. Para isso, o autor indica uma metodologia de trabalho com padrão, na perspectiva da resolução de problemas, dividida em três momentos.

O primeiro consiste na preparação da tarefa, sempre levando em consideração qual a turma em que o professor está atuando. Essa tarefa necessita ser desafiadora; não deve estar além da capacidade do aluno, mas precisa conter estratégias que ele consiga mobilizar para chegar ao resultado.

O segundo momento é quando o professor apresenta a proposta para a classe, deixando claro aos alunos as ações a serem feitas na atividade, a forma como irão trabalhar e o produto proposto na tarefa. Esse momento é visto como o "durante"; nele, os alunos trabalham, e o professor faz as mediações por meio de perguntas problematizadoras.

Para fechar o trabalho, o docente deve propor a socialização, sendo esse o terceiro momento. Nele, os alunos podem explicitar seus raciocínios, apropriar-se dos conceitos e perceber as regularidades do padrão, podendo chegar à lei de formação deste.

Enquanto os alunos resolvem a situação proposta, o professor pode escolher quais grupos irão socializar suas estratégias ou selecionar as respostas dos registros escritos e as disponibilizar para os alunos analisarem. É interessante o docente chamar aquele aluno (ou grupo) que não conseguiu chegar ao resultado com facilidade para iniciar a socialização para que haja na sala uma boa discussão. Essa prática deixa a socialização significativa. Mas cabe sempre ao professor fechar as ideias dos alunos, sistematizando os conceitos envolvidos.

Van de Walle (2009) argumenta que não se pode perder de vista o objetivo da tarefa; em nosso caso, chegar à lei de formação da sequência. Caso os alunos não cheguem a ela no final do momento da socialização, cabe ao professor o fechamento da atividade, ajudando-os a concluírem a lei de formação. Todo esse movimento, que também inclui a problematização, ocorreu na sala de aula do 4.º ano. Os alunos resolveram os problemas de padrão, discutiram, registraram modos de pensar e socializaram os conhecimentos produzidos.

Algumas Considerações

Tendo em vista a perspectiva do trabalho com situações-problemas e as investigações de padrões matemáticos nas aulas dos anos iniciais em prol do desenvolvimento do pensamento algébrico, a presente pesquisa buscou e apresentou indícios de generalização e análises importantes. Estas demonstram que o pensamento algébrico começa se desenvolver quando as estratégias de resolução de problemas são instigadas nas aulas de matemática desde os anos iniciais.

Desse modo, considero que a resolução de problemas matemáticos que abordem padrões contribui no processo de generalização. Friso que, na sala de aula, é importante que aconteçam as problematizações, nas quais o professor desafia e mobiliza os alunos a chegarem ao resultado por meio de argumentações. O modo como o docente conduz a comunicação em sala de aula norteará a estruturação do pensamento do aluno. É significativo o professor utilizar os termos usuais da Matemática e deixar claro o sentido deles.

De modo geral, percebo a autonomia das crianças desse 4.º ano para registrar, sendo essa uma prática relevante em sala. A linguagem matemática é essencial para que as crianças se apropriem melhor dos conceitos, aumentando seus argumentos na resolução de problemas. Ademais, a intervenção do professor e a disposição do ambiente propício para tarefas intencionadas nos registros favorecem o resultado.

Mediante os embasamentos teóricos e as análises aqui feitas, há indícios da construção de pensamento algébrico por crianças dos anos iniciais, pois tanto na oralidade quanto nos registros escritos os alunos buscam generalizar e indicar a linguagem algébrica no decorrer das tarefas. Realço a importância de propiciar situações em sala de aula, com os alunos dos anos iniciais, em que tal pensamento seja desenvolvido por meio das investigações matemáticas.

REFERÊNCIAS

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários é prática educativa. 28ª. Ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. *A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: tecendo fios do ensinar e do aprender. 1ª ed. São Paulo: Autêntica, 2009.

VALE, Isabel. Resolução de tarefas com padrões em contextos figurativos: exemplos de sala de aula. In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, 2., 2011, Rio Claro. *Anais*... Rio Claro: Unesp, 2011. p. 1-12. Disponível em: <www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/ivale-palestratexto.pdf>. Acesso em: mar. 2013.

VAN DE WALLE, John. *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SARAIVA, Manuel Joaquim; PEREIRA, Magda Nunes; BERRINCHA, Rogério Inácio. *Sequências e expressões algébricas*: aprendizagem da resolução de equações a partir de igualdades numéricas. Lisboa: APM, 2010.

AS ESTRIPULIAS DE PEDRINHO: TRABALHANDO COM A PERCEPÇÃO DE REGULARIDADES NO 1.º E 3.º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Kátia Gabriela Moreira

A presente narrativa tem o objetivo de apresentar os movimentos de uma tarefa de motivo de repetição com qual busquei envolver alunos do 1.º e do 3.º ano do Ensino Fundamental em problematizações visando à análise e à percepção de regularidades.

A proposta foi realizada no final mês de março de 2016, com uma turma de 1.º ano do Ensino Fundamental. A classe era composta por 12 alunos e pertencia a uma escola da rede municipal de Nazaré Paulista-SP. Além da narrativa dos movimentos da turma do 1.º ano, também apresento alguns excertos das discussões que ocorreram na turma do 3.º ano – da qual também era aprofessora responsável –, composta por 22 alunos de uma escola da rede municipal de Piracaia-SP.

O interesse em desenvolver a tarefa "As estripulias de Pedrinho" surgiu a partir da minha participação no Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat). Logo, a tarefa utilizada em sala de aula é o resultado das discussões e construções do grupo. Com isso, além dos objetivos supracitados, teve-se o intuito de verificar a potencialidade da tarefa para o desenvolvimento do pensamento algébrico das crianças, pois, embora tenham sido elaboradas propostas a partir de discussões teóricas e de vivências em sala de aula, só foi possível avaliar sua potencialidade após a análise do movimento em sala de aula.

Portanto, a narrativa está organizada da seguinte maneira: (1) As estripulias de Pedrinho, em que apresento os movimentos das crianças ao descobrir o motivo das sequências; (2) As estripulias de Pedrinho com as fotos de suas amigas, que dá continuidade à tarefa inicial, trazendo um novo desafio; (3) Os movimentos do 3.º ano, que traz alguns excertos do desenvolvimento da tarefa com os alunos maiores; e, por fim, (4) Algumas considerações do processo vivido, em que destaco pontos importantes da experiência vivenciada em sala de aula.

AS ESTRIPULIAS DE PEDRINHO

Para dar início à tarefa com os alunos do 1.º ano, entreguei para cada criança uma folha contendo a seguinte a seguinte proposta:

Quadro 1 – As estripulias de Pedrinho

Pedrinho é um menino que adora fazer estripulias e criar mistérios com enigmas. Sempre que pode inventa mil e uma histórias com segredos para seus amigos descobrirem. Olha lá o Pedrinho:

Ele resolveu criar o seu primeiro segredo! Olha o que ele fez com as imagens que tinha em seu computador:

Que tal descobrirmos o segredo que Pedrinho usou para criar essas imagens?

Fonte: Elaborado pela autora

A partir disso, iniciei o processo de problematização, com o objetivo de colocar os alunos em movimento de análise da sequência, para que pudessem identificar a regularidade. Sendo assim, questionei:

> *T01* **P**: *Então, ele resolveu criar um segredo. O que vocês estão observando?*
> *T02* **Sabrina**: *Uma igual, outra igual, outra igual* [pausa] [aponta para as imagens dos cachorros/gatos].
> *T03* **Vinicius**: *Não, não é assim! Oh: Cachorro, gato, panda, cachorro, gato, panda, cachorro e gato. O cachorro e o gato têm três e o panda têm dois!*
> *T04* **P**: *E o que mais vocês observam aí?*
> *T05* **Alex**: *Só isso!*
> *T06* **P**: *Será que esse é o segredo do Pedrinho?*
> *T07* **Alunos**: *Sim!*
> *T08* **P**: *E qual é o segredo mesmo?*
> *T09* **Vinicius**: *Cachorro, gato, panda... Cachorro gato, panda, cachorro e gato.*
> *T10* **Lucas**: *Não, é só gato e o cachorro.*
> *T11* **Vinicius**: *E o Panda!*
> *T12* **P**: *O que você acha, Laís?*
> *T13* **Laís**: *É! Cachorro, gato e panda!*

Nesse início de discussão, percebo que as crianças entraram no movimento de análise da sequência e identificaram o padrão repetitivo. Enquanto a aluna Sabrina (T02) identificou figuras iguais, o aluno Vinicius estabeleceu uma relação entre as figuras que se repetem, intervindo na fala da colega (T03). Do mesmo modo acontece com a fala do aluno Lucas (T10).

Vinicius era um aluno bastante participativo. Ele contribuía muito para as discussões em sala de aula. No entanto, tentava buscar estratégias para que outras crianças também tivessem a oportunidade de manifestar suas ideias. Para isso, procurava sempre problematizar o assunto com os demais alunos, buscando as opiniões deles sobre o foco da discussão, bem como sobre as ideias levantadas pelos colegas. Tal estratégia é evidenciada no trecho acima, quando questionei a aluna Laís (T12) sobre a fala de Vinicius. A partir da problematização, foi possível perceber que ela estava envolvida nas discussões e também reconhecia o motivo de repetição da sequência.

Nesse ponto, Hiebert et al. (1997) apontam que as oportunidades de aprendizagens surgem quando diferentes ideias e pontos de vista são socializados. Assim, na medida em que alguns alunos não participam dessa interação, as oportunidades de aprendizagens são limitadas. Para os autores, as aulas de Matemática se fortificam quando existe a participação de todos os alunos.

Ainda em busca de que outras crianças manifestassem suas significações, busquei retomar a discussão de uma tarefa realizada anteriormente, que também apresentavam situações envolvendo regularidades. Sendo assim, questionei:

T14 **P***: Será que a gente já fez alguma atividade que se parece com essa de segredo?*
T15 **Alunos***: Não!*
T16 **Cauã***: Sim* [pausa], *a do pequeno e grande!*
T17 **Vinicius***: É assim: O Panda é grande, o cachorro é assim* [demonstrando com a mão] e o gato é assim [demonstrando um tamanho menor que o anterior].
T18 **P***: E se eu quisesse continuar esse segredo do Panda? Como ficaria?*
T19 **Laís***: O Panda aqui* [aponta para o final da sequência apresentada na folha].
T20 **P***: E depois?*
T21 **Nicole***: O cachorro!*

Nesse excerto, percebo que o aluno Cauã e o aluno Vinicius relembraram nossas discussões com a sequência anterior, que envolvia medidas (T15). O aluno Vinicius, diante da lembrança do colega, buscou associá-la com a tarefa do Pedrinho (T16) identificando a sequência com o padrão repetitivo: grande (panda), médio (cachorro) e pequeno (gato).

Dando continuidade à discussão, questionei as crianças sobre como a sequência poderia ser continuada. A ideia era que, identificado o motivo, elas pudessem dar continuidade à sequência. Além disso, visava fornecer uma nova oportunidade para que as crianças que ainda não tinham identificado o motivo pensassem sobre qual seria a próxima figura, incentivando assim a retomada e análise da sequência.

T21 **P***: E aí, Paulo? Você descobriu o segredo do Pedrinho?*
T22 **Paulo***: Não!*
T23 **P***: Quem poderia explicar para o Paulo?*
T24 **Alunos***:* [Todos levantam as mãos].
T25 **P***: Vai, Sabrina, explica para ele!*
T26 **Sabrina***: Oh, Paulo, você tem que seguir a sequência aqui* [pausa] [aponta

para a folha].
T27 **P***: Que sequência, Sabrina?*
T28 **Sabrina***: Esta: cachorro, gato, panda, cachorro, gato, panda.*
T29 **P***: Entendeu, Paulo?*
T30 **Pedro***: Aham!*
T31 **P***: O que você entendeu? Explica pra gente!*
T32 **Paulo***: Tem que desenhar o panda na frente do gato!*
T33 **Vinicius***: E do cachorro e do gato, tem que desenhar um panda.*
T34 **P***: Como, Vinicius?*
T35 **Vinicius***: Tem que desenhar um panda aqui e um aqui* [aponta para o início e o fim da sequência].
T36 **P***: Aqui e aqui?* [aponta para o início e o fim da sequência].
T37 **Vinicius***: É, pra continuar a sequência!*
T38 **P***: Então eu posso continuar a sequência dos dois lados?*
T39 **Lucas***: Dos três, né, prô?*
T40 **Vinicius***: Por quê? Só tem dois!*
T41 **Lucas***:* [risos].

Nesse trecho, ganha destaque a explicação de Sabrina para o entendimento do aluno Paulo. Percebo aqui o quanto as crianças colaboram para aprendizagem umas das outras quando são encorajadas a falar sobre suas significações. Paulo não só demonstrou o entendimento da explicação dada pela colega como pôde identificar qual seria a próxima figura da sequência. Além disso, destaco o uso da linguagem matemática da aluna Sabrina quando, ao explicar o problema para o colega Paulo, utiliza o termo "sequência" (T26).

Por fim, destaco a percepção das crianças com relação ao lado continuidade à sequência. Quando surge a discussão de como continuar a sequência, Vinicius (T34) aponta para a possibilidade de continuidade nas duas extremidades. Isso evidência a análise cuidadosa e o olhar das crianças para o motivo.

Ainda com relação a essa discussão, ao elaborar a presente narrativa, refleti acerca da afirmação do aluno Lucas (T39), e tentei buscar uma significação para a sua fala – "*dos três, né, prô?!*" –, referente ao número de lados em que seria possível dar continuidade à sequência. Acredito que ele fez referência às três figuras presentes no motivo da sequência, logo, é possível que, para este aluno, a sequência poderia ser continuada a partir de qualquer uma das três figuras. E isto estaria carregado de sentido! No entanto, na dinâmica dos diálogos, perdi a oportunidade de questioná-lo sobre sua percepção.

Ao final dessa discussão, percebi que o aluno Paulo começou a registrar números na sequência. Assim, ele numerou as figuras de 1 a 5. Ao ser questionado, o aluno limitou-se a dizer que *"quis fazer os números*". Tal iniciativa, influenciou outras produções no decorrer da tarefa. Abaixo, destaco o registro de Pedro:

Figura 1 – Registro de Pedro

Fonte: Acervo Grucomat

Além de Paulo, Sabrina também fez um registro em sua sequência. A aluna deu continuidade ao "segredo do Pedro", acrescentando a representação de um panda em uma das extremidades, como pode ser observado na figura abaixo:

Figura 2 – Registro de Sabrina

Fonte: Acervo Grucomat

Confesso que fiquei muito satisfeita com a iniciativa das crianças. Acredito que isso evidencia a cultura de sala de aula criada com a construção de um ambiente seguro, em que se percebe espaço aberto para manifestação de ideias e participação no processo de construção de conhecimento, tomando-se iniciativas sem ter a necessidade de "pedir autorização" – como era comum nas aulas tradicionais do meu processo de escolarização.

Após os movimentos narrados acima, disponibilizei às crianças a segunda tarefa:

Figura 3 – Sequência dos piões

Fonte: Acervo do Grucomat

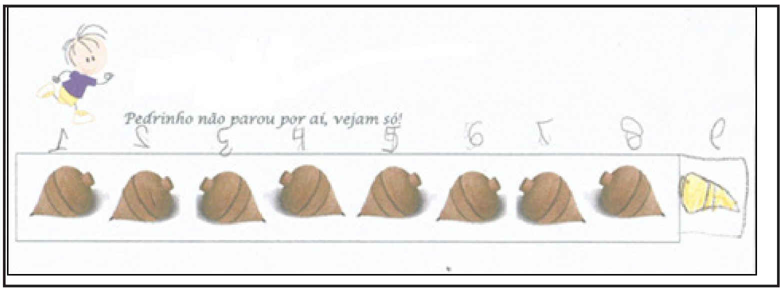
Assim que entreguei as folhas, as crianças iniciaram a discussão em busca de qual seria o "segredo" de Pedrinho, como podemos observar no diálogo abaixo:

> *T43* **Vinicius***: Ah, esse é assim: pião pra cá* [aponta para direita]*, pião pra lá* [aponta para esquerda]*, pião pra cá* [aponta para direita]*, pião pra lá* [aponta para esquerda].
> *T44* **Cauã***: Têm dois pra lá!* [aponta para a esquerda].
> *T45* **Vinicius***: É, têm dois pra cá* [aponta para esquerda]*, dois pra lá* [aponta para direita]*, dois pra cá* [aponta para esquerda], *dois pra lá* [aponta para direita].
> *T46* **Elton***: Têm oito piões!*
> *T47* **P***: E eles estão do mesmo jeito?*
> *T48* **Cauã** *e* **Vinicius***: dois pra cá, dois pra lá.*
> *T49* **P***: Eles se repetem em uma ordem?*
> *T50* **Vinicius***: Sim. É assim, ó: para esquerda, para direita, para esquerda, para direita e para esquerda.*
> *T51* **P***: Ah! Primeiro ele vai para esquerda, depois para a direita? E é um pião para cada lado?*
> *T52* **Vinicius***: Não, dois para direita, dois para esquerda!*
> *T53* **P***: Será que esse é o segredo do Pedrinho?*
> *T54* **Elton***: Aham!*
> *T55* **P***: E como poderíamos continuar?*
> *T56* **Cauã***: Tinha que ser dois virado pra lá* [aponta para a esquerda, dando continuidade à sequência].

Nesse diálogo, destaco alguns pontos importantes da minha mediação no trabalho de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Noto que eles ainda estão em processo de construção do conceito referente ao que é, de fato, uma sequência com motivo de repetição. Como consequência desse processo, algumas percepções precisam ser desenvolvidas nos alunos. E é nesse ponto que destaco a mediação realizada e o quanto algumas problematizações como "*Eles estão do mesmo jeito?*" (T47), "*Eles se repetem em uma ordem?*" (T49) e "*Como poderíamos continuar?*" (T55) se mostraram fundamentais para que as crianças passassem a perceber as regularidades presentes na sequência. Tais problematizações vão chamando a atenção dos alunos para as regularidades.

Como na atividade anterior, as crianças registram alguns números nas figuras. Destaco o registro de Sabrina:

Figura 4 – Registro de Sabrina

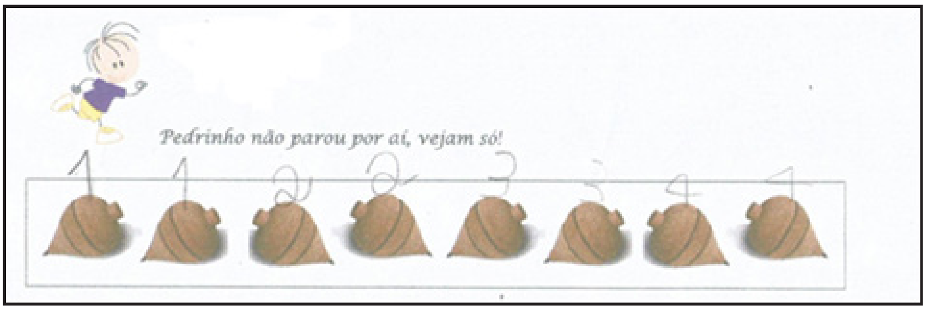


Fonte: Acervo da autora

Além disso, destaco a continuidade da sequência apontada por Sabrina, que, ao ser questionada, argumentou: *"são dois pra cá e dois para lá"*. No entanto, a aluna não percebeu que já existia um pião na mesma direção dos anteriores. Durante sua fala, a aluna percebe que confundiu a posição do pião registrado. No entanto, não vê a necessidade em retomar o registro.

Já o aluno Vinicius apresenta o seguinte registro:

Figura 5 – Registro de Vinicius



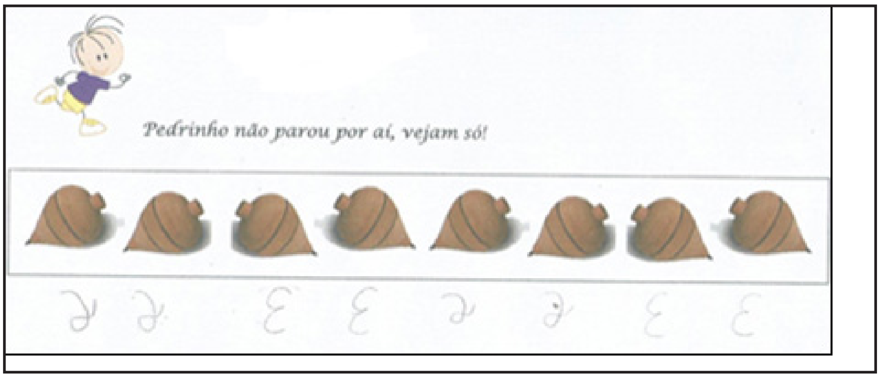
Fonte: Acervo da autora

Ao ser questionado, o aluno argumenta que repetiu os números porque que as peças eram iguais. Entendo que ele tenha tentado estabelecer uma relação entre a posição das figuras e o número registrado. Ao ser indagado sobre seu registro, Vinicius recebe o auxílio da colega:

> *T57* **Aline***: Esse é igual* [aponta paras as duas primeiras duplas de piões voltados para esquerda]*, esse e esse é igual a esse* [aponta paras as duas primeiras duplas de piões voltados para direita].
> *T58* **P***: Eles têm uma ordem?*
> *T59* **Aline***: Sim!*
> *T60* **P***: E como poderíamos continuar?*
> *T61* **Andressa***: Esquerda, esquerda, direita, direita, esquerda, esquerda, direita.*

Por fim, destaco o registro do aluno Alex:

Figura 6 – Registro de Alex



Fonte: Acervo da autora

O aluno também registrou números para identificar o motivo da sequência. Alex criou outra maneira de representar o padrão da sequência de piões. E, nesse ponto, Van de Walle (2009, p. 296) aponta que "[...] um avanço matematicamente significativo é perceber que dois padrões construídos com materiais diferentes são realmente o mesmo padrão".

Até esse momento da narrativa, fica muito forte a questão da participação dos alunos no próprio processo de aprendizagem. É provável que essa discussão não seria desencadeada por mim, por considerá-la muito complexa, talvez; mas, quando se dá "voz e ouvidos" aos alunos, as capacidades de criação que eles apresentam acabam por surpreender.

Na sequência, apresento os movimentos da última tarefa da sequência proposta aos alunos.

AS ESTRIPULIAS DE PEDRINHO COM AS FOTOS DE SUAS AMIGAS

A última etapa da tarefa foi iniciada com a distribuição da seguinte proposta:

Figura 7 – Sequência 2

Fonte: Acervo do Grucomat

Ao receberem a proposta de atividade, as crianças apontaram:

T62 **Vinicius**: *Nossa, olha o que o Pedrinho fez!*
T63 **Alex**: [risos].
T64 **Vinicius**: *Mas olha o que ele fez* [risos].

Perdi a oportunidade de questioná-los, no entanto suponho que estivessem fazendo referência às figuras invertidas, pois isso chamou a atenção das crianças durante toda tarefa. Ainda nesse trecho, destaco o movimento de significação das crianças para com o personagem da tarefa, "Pedrinho". A fala "*Nossa, olha o que o Pedrinho fez!*" (T62) evidencia o quanto as crianças estavam envolvidas e tinham como verdade as "estripulias" do personagem, ou seja, elas estavam imersas no jogo simbólico da proposta.

Após a leitura do enunciado da tarefa, indaguei as crianças sobre o que estavam observando:

> *T65* **Aline***: Eu estou vendo de cabeça pra cima, cabeça pra baixo, cabeça pra cima, cabeça pra baixo...*
> *T66* **Vinicius***: Tem dois pra cima!*

Logo nesse início, percebo que as crianças já buscavam desvendar o "segredo" do personagem, ou seja, o motivo de repetição da sequência. Em seguida, as crianças foram nomeando as figuras de acordo com a ordem em que elas apareciam na sequência. Sendo assim, questionei às crianças sobre qual seria o segredo de Pedrinho e como seria possível continuá-lo:

> *T67* **P***: Qual é o segredo do Pedrinho?*
> *T68* **Lucas***: Uma pra cima, outra pra baixo, uma pra cima, outra pra baixo.*
> *T69* **Vinicius***: Não, mas tem uma pra cima, uma pra baixo e duas pra cima!*
> *T70* **P***: E como poderíamos continuar?*
> *T71* **Lucas***: Uma pra cima!*
> *T72* **Cauã***: Mais uma pra baixo e duas pra cima!*

As crianças foram articulando as ideias em busca da identificação do "segredo". Na posição de Lucas, tal segredo seria "cima, baixo, cima, baixo" (T68), mas Vinicius argumentou que não, pois após a segunda figura com a menina posicionada para cima existia outra figura em posição idêntica (T69). Ao perceber a contradição, busquei problematizar a continuidade da fila, e Lucas (T71) demonstrou ter considerado o apontamento do colega, ao passo que Cauã (T72) estava convicto de que a próxima figura seria posicionada para baixo.

Nesse momento, percebi que algumas crianças passaram a realizar registros de números na figura. Então, passei a problematizá-los. Abaixo, destaco a produção de Alex:

Figura 8 – Registro de Alex

Fonte: Acervo da professora

Observo que o aluno buscou novamente estabelecer uma representação para o padrão da sequência [2,1,2,2,1,2]. Isso representa, como já apontado anteriormente, um conhecimento importante para a introdução do pensamento algébrico.

Nesse ponto, Van de Walle (2009, p. 296) afirma que

> Os estudantes devem reconhecer que o padrão de cores "azul, azul, vermelho, azul, azul, vermelho" tem a mesma forma que "palmas, palmas, pare, palmas, palmas, pare". Esse reconhecimento estabelece a base para a ideia de que duas situações muito diferentes podem ter as mesmas características matemáticas e desse modo são idênticas de alguns modos importantes. Saber que cada padrão acima pode ser descrito como tendo a forma AABAAB é, para os estudantes, uma primeira introdução ao potencial da álgebra.

Com isso, é possível afirmar que as discussões têm deixado importantes resíduos para os alunos. Para finalizar a tarefa, apresentei às crianças a última proposta: "*Ainda faltam colocar quatro amigas: Sassá, Ana, Lalá e Dani. Como ficaria a montagem dessas fotos?*"

A partir desse enunciado, disponibilizei uma folha de sulfite para cada criança, a fim de que pudessem registrar suas produções. Abaixo, destaco duas delas:

Figura 9 – Registro de Aline

Fonte: Acervo da autora.

Embora não tenha seguido o motivo repetitivo da sequência, a aluna Aline também apresenta a preocupação de identificar as figuras. Logo, as figuras invertidas foram demarcadas com o número 3; e as figuras posicionadas corretamente, com o 7.

Figura 10 – Registro de Vinicius

Fonte: Acervo da autora

Já o registro do aluno Vinicius aponta para a continuidade da sequência levando em consideração o motivo da sequência.

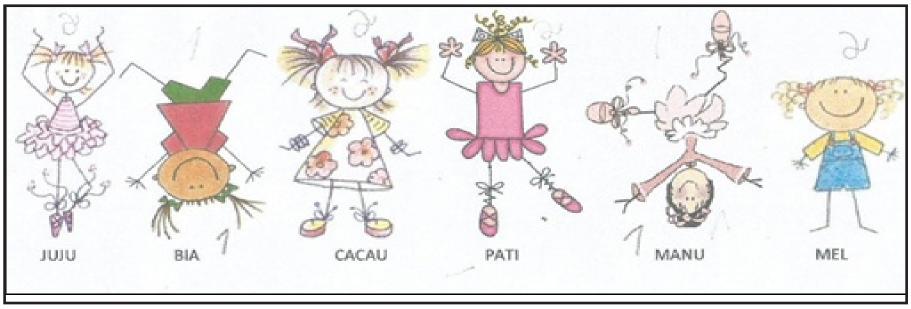
A tarefa foi finalizada com a socialização dos registros produzidos pelos alunos. Algumas crianças, mesmo após a socialização e negociação de qual seria, de fato, o “segredo” da sequência, tiveram dificuldades em identificá-lo. Por alguns momentos, cheguei a cogitar que a sequência estivesse confusa, por conta das posições dos corpos das figuras e dos seus braços. No entanto, tais questões não surgiram no 1.º ano, então, achei que talvez fosse apenas uma percepção minha, e, por isso, decidi não interferir nas discussões. Não obstante, entrei em contradição quando levei a proposta para a turma do 3.º ano. Tais discussões serão narradas no próximo item.

OS MOVIMENTOS DO 3.º ANO

Levei a tarefa para a turma do 3.º ano e segui a mesma proposta desenvolvida no 1.º ano. As discussões das duas primeiras sequências se aproximaram das que foram narradas anteriormente. No entanto, a situação mudou quando chegamos na discussão da última sequência, as “Amigas de Pedrinho”, visto que as crianças começaram a levantar hipóteses sobre qual seria “segredo”.

As crianças levantaram muitas hipóteses de motivo para a sequência:

Figura 11 – Sequência das Menininhas



Fonte: Acervo da professora

- uma bailarina, três não bailarinas, uma bailarina, três não bailarinas;
- Braço pra cima, braço pra cima (virando a folha), braço pra baixo;
- Mão errada, mão certa, mão errada, mão certa, mão errada, mão certa;
- uma em pé, uma de ponta cabeça; duas em pé;
- Pintinha no rosto, sem pintinha no rosto, pintinha no rosto;
- três cabelos lisos, três enrolados;

Sem saber como dar continuidade à tarefa, insegura e com medo de não valorizar toda essa percepção levantada pelos alunos, nas quais via muito sentido, decidi propor que fizessem um registro do “segredo” que julgavam ser coerente com a sequência, para que no outro dia pudessem ser socializadas as hipóteses de todas as duplas.

Com essa proposta, houve tempo para que trocasse ideias com Cidinéia, uma professora integrante do Grucomat, que também participou da elaboração da tarefa em questão. Minha hipótese era a de que não havíamos garantido a repetição do motivo necessária à sua identificação por parte das crianças. Juntas, pensamos que os desenhos poderiam estar influenciando a busca por várias características e, talvez, fosse necessário proceder a uma troca dessas imagens ou mesmo à reformulação do enunciado, deixando claro que o foco deveria recair sobre as ações realizadas pelas figuras das fotos. Mas a atividade já estava em andamento e isso não foi possível.

A partir de então, as produções das crianças foram digitalizadas, e as imagens projetadas, para que pudessem ser socializadas. Primeiramente, propus a discussão sobre as produções dos alunos. A ideia era debater a validade ou não das hipóteses levantadas. Abaixo, destaco a produção de Any e Elton:

Figura 12 – Registro de Any e Elton

Fonte: Acervo da autora

Ao apresentar o registro para os colegas, os alunos foram questionados sobre a posição da primeira figura, visto que, na opinião da turma, ela deveria ser virada para cima. Mas isso afetaria todo o resto da sequência. A fim de resolver a questão, a dupla apontou que era só inverter a posição da folha, logo a primeira figura seria invertida sem que fosse preciso apagá-la. Em resposta, os colegas apontaram que as duas figuras do meio ficariam viradas para baixo, no entanto só uma deveria estar nessa posição. Sendo assim, o grupo não validou a hipótese apresentada pela dupla.

Durante as discussões, observei o quanto as crianças foram criteriosas para com a análise, validando ou não as produções apresentadas por seus colegas.

Após esse momento, conversei com as crianças sobre o Grucomat e seu objetivo de elaborar tarefas para os professores trabalharem nas aulas de Matemática. Elas também foram inteiradas da minha surpresa ao me deparar com a análise criteriosa que fizeram e apresentada as ideias que o grupo não tinha pensado. Sendo assim, expliquei às crianças que a turma se encontrava diante de um desafio para finalizar a tarefa e que o foco inicial estava nas ações que Pedrinho realizou com as “fotos” de suas colegas, e não nos outros aspectos anteriormente observados.

Depois dessa conversa, as crianças identificaram as produções de duas duplas que levaram em consideração a ação realizada por Pedrinho. No entanto, expliquei sobre minha insatisfação com o resultado da tarefa e sobre como elas ajudariam o Grucomat a pensar melhor sobre os enunciados das tarefas, visto que, para evitar confusões, fazia-se necessário uma linguagem clara. Convidei-os a pensar na reformulação do enunciado "Ainda falta colocar quatro amigas: Sassa, Ana, Lala e Dani. Como ficaria a montagem dessas fotos?", de modo que outras crianças não se confundissem e fossem direto ao foco. Envolvidos na tarefa, os alunos transformaram o antigo enunciado em "Descubra o segredo da fila das meninas e repare bem no movimento dos corpos".

Como as crianças demonstravam cansaço, optei por finalizar a tarefa, mesmo sentindo a necessidade de problematizar as questões do enunciado. Tais problematizações ficaram para um outro momento.

Por fim, apresento algumas considerações.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES DO PROCESSO VIVIDO

Finalizo a presente narrativa destacando a potencialidade da tarefa em trazer discussões importantes para o processo de construção do pensamento algébrico dos alunos. Embora as crianças tenham apontado algumas questões sobre a tarefa a serem repensadas, acredito que isso seja natural, visto que não existem tarefas tão bem-acabadas que possam servir como "receitas prontas". Há sempre que se levar em consideração o contexto da sala de aula, a participação dos alunos e o que eles trazem para contribuir. Com isso, pequenas adaptações são sempre necessárias.

O envolvimento dos alunos também me deixou satisfeita, ao ponto de ousar afirmar que esse foi o sucesso da tarefa. Quando se sentem seguros, eles participam, trocam ideias, tomam iniciativas e aprendem com os pares. Como consequência disso, tornam-se coautores do processo de construção do conhecimento matemático uns dos outros.

Por fim, acredito que a tarefa deixa alguns caminhos para a continuidade, como ampliar as discussões relacionadas aos padrões das sequências, levando-se à discussão os registros produzidos por algumas crianças, apresentar para os alunos do 3.º ano os registros produzidos pelos alunos do 1.º ano ou ainda trazer novas sequências, para afinar as discussões sobre o padrão, enfim, essas são algumas possibilidades.

REFERÊNCIAS

HIEBERT, James et al. *Making sense:* teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997.

VAN DE WALLE, John A. *Matemática no ensino fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

USO DE PADRÕES: POSSIBILIDADE DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA PARA OS ALUNOS DESENVOLVEREM A CAPACIDADE DE GENERALIZAÇÃO

Claudia Cristiane Bredariol Lucio

Neste estudo, apresento a análise de uma das tarefas de sequência elaborada pelo Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat), do qual faço parte. Sou professora de Matemática em uma escola privada de um município do interior do estado de São Paulo. Ministro aulas do 6.º ao 8.º ano. As salas contam com 33 alunos cada, e a escola adota um material apostilado da própria rede de ensino. No entanto, os professores têm autonomia para ampliar e/ou complementar o material com outras atividades que julgam necessárias. Nesse sentido, não tive problemas em desenvolver a mencionada sequência de ensino.

Meu objetivo inicial era oportunizar às crianças a familiarização com esse tipo de tarefa e verificar as possibilidades de aprendizagem significativa para os alunos. No Quadro 1, pode ser vista a tarefa com a qual trabalhei.

Quadro 1 ─ Tarefa elaborada pelo grupo colaborativo

Observe a sequência de carinhas a seguir:
☹ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ ☺ ☹ ☺ ☺
a) Quantas carinhas estão nas duas primeiras repetições?
b) E nas cinco primeiras?
c) Quantas repetições existem na figura?
d) Quantas carinhas tristes?
e) Quantas carinhas alegres?
f) Quantas carinhas ao todo?
g) Como seria a 33ª carinha? Como você sabe disso?
h) Como seria a 44ª carinha? Como você sabe disso?

Fonte: Elaborado pelo Grucomat

Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos foram organizados em grupos de quatro componentes. Estipulei um tempo para que a respondessem; e, em seguida, cada grupo expôs como foi o processo de resolução. Foram utilizadas, aproximadamente, quatro aulas em cada turma.

Propus o trabalho em grupo (Quadro 1), com o objetivo de verificar se o enunciado estava adequado para possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico e uma generalização. Os alunos poderiam utilizar estratégias pessoais. Logo, as soluções encontradas seriam socializadas. Primeiramente foi realizada uma leitura coletiva e esclarecedora das possíveis dúvidas de vocabulário, porém sem muitos esclarecimentos matemáticos nesse momento inicial.

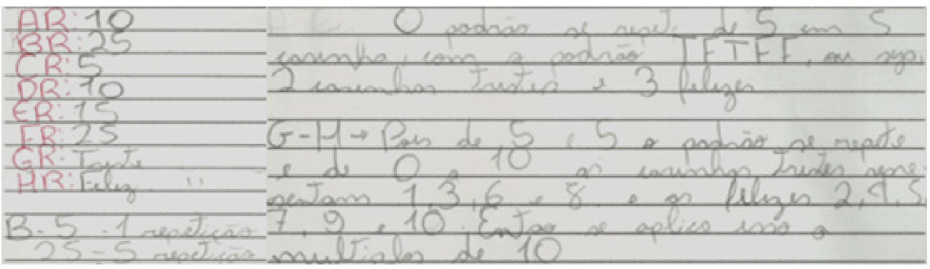
Os alunos conseguiram realizar a tarefa, mas necessitaram de intervenções para que fosse apresentada a resposta completa. Fizeram perguntas do tipo: "*É só para responder com o número ou precisa descrever o jeito que pensou em cada situação?*"; "*Precisa escrever qual é a regra que se repete?*". Intervi, não no sentido de fornecer a resposta, mas de ajudar os grupos a encontrá-la por si mesmos, deixando mais explícita a intencionalidade da atividade proposta. Desse modo, os alunos não se desmotivavam e se dedicavam apenas a pensar sobre o que era solicitado no problema. Os grupos apresentaram diferentes soluções e registros. Nestes, pude perceber as distintas interpretações e a ausência de alguns conceitos (por exemplo, motivo e repetição).

Por meio das falas dos alunos e das análises dos registros, verifiquei que a primeira questão ("Quantas carinhas estão nas duas primeiras repetições?") possibilitaria variadas interpretações. Todos os grupos afirmaram que nas duas primeiras repetições há 10 carinhas, porém na socialização mostraram que as duas primeiras repetições seriam as 10 primeiras, o que não é verdade, pois as duas primeiras repetições se iniciam após o motivo. Quando perguntei quantas repetições existiam na figura, todos responderam 5, apesar de serem 4. Na devolutiva houve a necessidade de definir o que é repetição para que fosse possível identificar quantas existem na figura apresentada.

As questões *d* ("Quantas carinhas tristes?") e *e* ("Quantas carinhas alegres?") não deixavam claro se se referiam ao motivo ou ao total da sequência. Isso não possibilitou a generalização, sem minha interferência, de que, a cada cinco carinhas, duas são tristes e três são felizes.

Durante a análise dos registros pude verificar que todos os grupos conseguiram identificar o motivo — a cada cinco carinhas inicia-se a repetição. Muitos utilizaram como estratégia o desenho para descobrir a 33.ª e 44.ª carinha, mas na socialização mostraram que conseguiriam generalizar, caso a proposta consistisse em pedir uma quantidade maior de carinhas. Um dos grupos apresentou uma generalização diferente, conforme consta da Figura 1.

Figura 1 — Registro de um grupo de uma turma de 8ºano.



O padrão se repete de 5 em 5 carinhas, com o padrão TFTFF, ou seja, 2 carinhas tristes e 3 felizes.
G-H [para se referir às respostas g, h] →, pois de 5 em 5 o motivo se repete e de 0 a 10 as carinhas tristes representam 1, 3, 6 e 8 e as felizes 2, 4, 5, 7, 9 e 10. Então se aplica isso a múltiplos de 10.

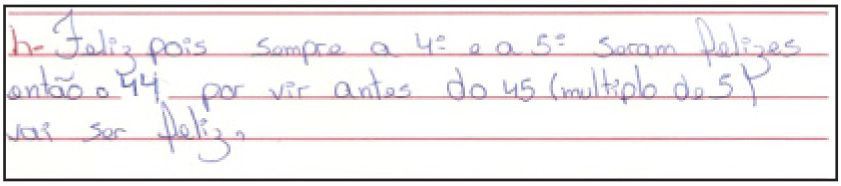
Fonte: Fotografado e transcrito pela autora

Para melhor compreensão da resposta dos alunos, optei por transcrever o texto da direita. Inicialmente, no texto da esquerda, constata-se que, dos itens *a* a *f*, somente no *c* não deram a resposta esperada, pois afirmaram haver cinco repetições, quando o correto seria quatro. No caso da questão *b*, o grupo justifica a resposta registrando ao final do texto: "5 – 1 repetição"; "25 – 5 repetições". Portanto, para eles, o motivo inicial já constituía uma primeira repetição.

No texto da Figura 1, o grupo fez a generalização para múltiplos de 10 nas questões *g* e *h*. Para isso, eles numeraram as figuras de 1 a 10, de forma que, a cada grupo de 10, essa numeração se repetisse. Assim, por exemplo, a 33.ª carinha seria a terceira da sequência (carinha triste), visto que na 30.ª se completa o terceiro grupo de 10; logo, restando 3 que corresponde ao número 3 (no registro dos alunos). Tal resposta chamou a atenção do grupo colaborativo, pois a expectativa era de que os alunos generalizassem o resto para grupos de 5; no entanto, eles generalizaram para grupos de 10, o que, de certa forma, facilita a identificação de uma figura qualquer na sequência.

Outra generalização que gostaria de destacar é a que consta na Figura 2. Nela está indicada a solução de um dos grupos para o item *h* ("Como seria a 44.ª carinha? Como você sabe disso?").

Figura 2 − Registro de um grupo de uma turma de 8.ºano

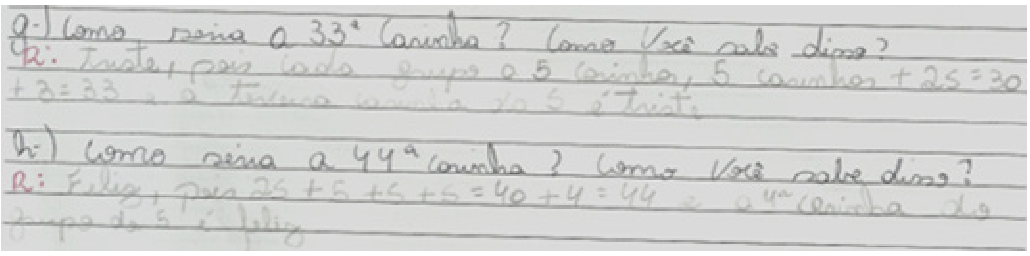

h- Feliz pois sempre a 4º e a 5º seram felizes então a 44 por vir antes do 45 (multiplo do 5) vai ser feliz.

Fonte: Fotografado pela autora

O grupo utilizou os múltiplos de 5 e subtraiu uma unidade para encontrar qual carinha corresponde ao padrão inicial (44 = 45 – 1), afirmando que sempre a 4.ª e a 5.ª seriam felizes.

Outro tipo de generalização para os itens *g* e *h* foi apresentado por vários grupos, os quais se apoiaram na ideia de múltiplos de 5. Apresento na Figura 3 o registro de um grupo do 7.º ano.

Figura 3 − Registro de um grupo de uma turma de 7ºano


g-) Como seria a 33ª Carinha? Como Você sabe disso?
R: Triste, pois cada grupo a 5 carinhas, 5 carinhas + 25 = 30 + 3 = 33 e a terceira carinha do 5 é triste.
h-) Como seria a 44ª carinha? Como Você sabe disso?
R: Feliz, pois 25 + 5 + 5 + 5 = 40 + 4 = 44 e a 4ª carinha do grupo de 5 é feliz.

g) Triste, pois cada grupo a 5 carinhas, 5 carinhas + 25 = 30 + 3 = 33 e a terceira carinha do 5 é triste.

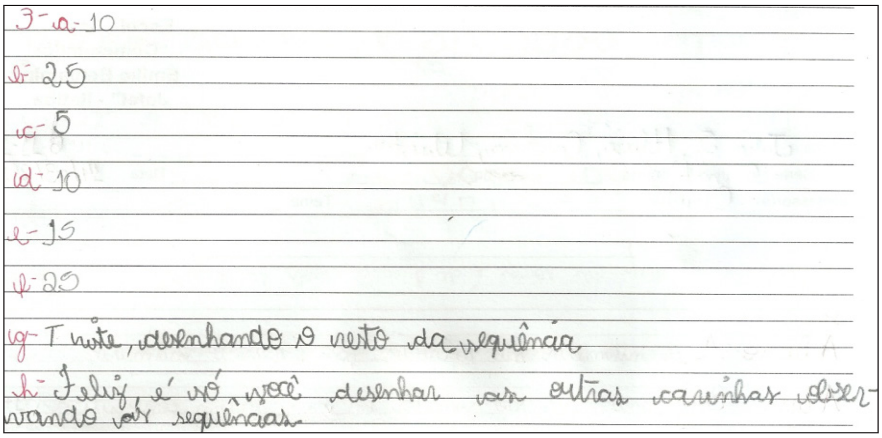
h) Feliz, pois 25 + 5 + 5 + 5 = 40 + 4 = 44 e a 4.ª carinha do grupo de 5 é feliz.

Fonte: Fotografado e transcrito pela autora

Vale destacar que esses alunos iniciaram a generalização dos grupos de 5 desde a resposta do item *b*: a cada 5 carinhas, 3 são tristes e 2 alegres. Nas questões *g* e *h*, os alunos acrescentaram múltiplos de 5, a partir do 25, último número da sequência exposta na atividade, e completaram com as carinhas que faltavam; assim, não tiveram a necessidade de utilizar cálculos matemáticos mais elaborados. Como destacado anteriormente, se a questão tivesse solicitado uma posição bem superior de carinha, provavelmente esse recurso de contagem de 5 em 5 não teria sido suficiente; seria necessário lançarem mão de outras estratégias. Isso também pode ser observado com relação à 44.ª figura.

No 6.º ano, a maioria dos grupos utilizou o recurso de contar de 5 em 5. Na socialização, na aula seguinte, cada grupo apresentou suas respostas, justificando o raciocínio usado em sua resolução. Nos registros dos alunos, o mais recorrente nas respostas dessa turma foi completar a sequência por meio do desenho. Na Figura 4, exponho uma das soluções para ilustrar essa estratégia.

Figura 4 − Registro de um grupo de uma turma de 6.ºano


3- a- 10
b- 25
c- 5
d- 10
e- 15
f- 25
g- Triste, desenhando o resto da sequência
h- Feliz, é só você desenhar as outras carinhas obser-vando as sequências.

Fonte: Fotografado pela autora

Diferentemente do corrido com os alunos do 6.º ano, na turma do 7.º as respostas começaram a se modificar, ocorrendo algumas generalizações, e alguns grupos questionaram muito sobre o enunciado durante a resolução. Isso também foi notado na turma do 8.º ano, porém os registros apresentaram diferentes estratégias de resolução.

Após a realização da tarefa, recolhi os registros escritos dos alunos e os levei para o grupo colaborativo da universidade. No grupo, a partir de meus depoimentos e das dúvidas que os alunos tiveram diante das questões por nós formuladas, constatamos a necessidade de reformular o enunciado das perguntas para atingir os objetivos daquela tarefa.

Ana Maria Boavida, professora adjunta da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Portugal, visitou nosso grupo. Com isso, pudemos contar com sua colaboração no que diz respeito ao uso dos conceitos *padrão* e *módulo*. Ela indicou que os alunos estavam utilizando o termo *padrão* para identificar o módulo da sequência, sendo que padrão é uma sequência com regularidade. Retomamos nossas referências bibliográficas e percebemos que devemos considerar que “um padrão de repetição é um padrão no qual há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente” (VALE et al., 2006, p. 20).

Pensamos, discutimos e ajustamos as perguntas. Confirmamos ainda mais que as discussões e as reflexões teóricas sobre os registros das aulas possibilitam a investigação sobre os discursos matemáticos em sala de aula. O novo texto ficou assim:

Quadro 2 − Tarefa reelaborada

Observe a sequência de carinhas a seguir. Ela tem um motivo de repetição.
☹ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ ☺ ☹ ☺ ☺ ☹ ☺ ☹ ☺ ☺
a) Indique qual o motivo dessa sequência.
b) Quantas vezes o motivo aparece na sequência?
c) Como seria a 33ª carinha? Como você sabe disso?
d) Como seria a 44ª carinha? Como você sabe disso?
e) Quantas carinhas existem ao todo no motivo?
f) Quantas carinhas tristes existem no motivo?
g) Quantas carinhas alegres existem no motivo?
h) Se a sequência tivesse 100 carinhas, quantas seriam tristes e quantas seriam alegres?

Fonte: Elaborado pelo Grucomat

Com essa alteração, outros professores do grupo irão desenvolvê-la em suas salas de aula. Ao fazê-lo, identificarão se, com a adequação da linguagem, os objetivos esperados serão alcançados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A tarefa apresentada reforça a importância de uma cultura social de sala de aula, na qual o professor problematize o tempo todo, isto é, coloque os alunos em um movimento reflexivo, não lhes fornecendo respostas, mas novas questões. Pode-se dizer que meu papel nessa tarefa foi ensinar aos alunos como se resolve um problema, ou seja, indicar a eles o que é relevante no texto e qual é a pergunta proposta. O gênero textual *problema* precisa ser trabalhado em sala de aula, somente dessa forma o aluno ficará mais atento à pergunta do que ao problema.

Na perspectiva histórico-cultural, é muito importante relacionar a interação social, a linguagem e o desenvolvimento do ser humano. A palavra serve como meio de interação e compreensão entre os sujeitos. Fazendo o uso da linguagem, os alunos têm a possibilidade de elaborar, registrar e compartilhar suas ideias matemáticas. Com esse movimento de analisar e generalizar as características por meio da linguagem, os estudantes organizam ou transformam seus conceitos.

Esse ambiente se pauta em alguns princípios: o diálogo como condição necessária para a comunicação e, consequentemente, a aprendizagem. A sala de aula é sempre um espaço de diálogo. No entanto, Alrø e Skovsmose (2006) argumentam que não se trata daquela modalidade de diálogo em que o professor pergunta e os alunos respondem, e sim de formas de comunicação em que os alunos têm a possibilidade de expor suas ideias, ouvir as dos colegas, fazer contrapontos e buscar consensos. Os pesquisadores mencionados assinalam: “Participar de um diálogo é também uma forma de ação e produção de significado mediante o uso da linguagem” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p.133) Enfim, a sala de aula deve, no caso da disciplina em que se enquadram as atividades indicadas, possibilitar a circulação de discursos matemáticos.

Segundo Hiebert et al. (1997), é importante que as aulas se tornem “comunidades matemáticas” e que todos os alunos participem, porque essas comunidades oferecem ambientes ricos para o desenvolvimento de entendimentos profundos da área. Os autores afirmam que as oportunidades para a construção de entendimentos matemáticos são reforçadas quando os alunos trabalham em conjunto para resolver problemas e interagem intensamente para desvendar métodos de solução. Ao se comunicarem ─ com ênfase no contexto de interações sociais ─, os alunos se envolvem em falar, ouvir, escrever e explicar como pensaram. Ao exporem suas soluções, discutirem e proporem novas sugestões, é necessário que os alunos clareiem as explicações para que outros as entendam. Em um movimento de reciprocidade, eles estarão sendo incentivados a pensarem mais profundamente sobre suas próprias ideias para, depois, as descreverem mais claramente. Comunicar melhor implica em melhorar as relações e fazer conexões.

É visível a importância da linguagem nas tarefas propostas em sala de aula, na perspectiva de resolução de problema, pois é ela o principal veículo de transmissão de informação. No caso da tarefa aqui relatada, ficou evidente que, se a consigna não tiver significado para o aluno, ele terá dificuldades em atingir os objetivos que o professor espera. Com essa proposta, destacou-se também a relevância da socialização para esclarecer os possíveis equívocos nos enunciados, os quais realmente não foram entendidos pelos alunos, e os aspectos que não estavam claros na questão.

Na realização e na socialização do problema, foi constatado que o texto não estava bem redigido. Sendo assim, houve a necessidade de intervenções para esclarecer o que realmente se esperava com a questão. Isso não possibilitou, em todos os grupos, a generalização esperada nos registros.

Partindo da análise dos registros produzidos pelos alunos e das ideias comunicadas durante a socialização no grupo colaborativo, pude levantar indícios de que a atividade sobre padrões contribuiu para que os alunos interagissem em uma cultura social de aula de Matemática com a qual eles estavam pouco acostumados. Eles entraram na dinâmica de trabalhar em grupo, compartilhar ideias e se comunicar com toda a classe.

O uso de padrões em aulas de Matemática possibilita o desenvolvimento da capacidade de generalização por alunos desde o início de seus estudos, pois proporciona a descoberta, permitindo que os estudantes estabeleçam propriedades numéricas ou geométricas, elaborem conceitos matemáticos e explicitem uma lei de formação para uma sequência. Acrescente-se a essas potencialidades que a presença dos padrões no ensino da Matemática ocorre devido à necessidade de "ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências" (VALE et al., 2006, p. 197). O estudo de padrões vai ao encontro da criação desse ambiente, "apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões." (VALE et al., 2006, p. 197). Assim, entendo que as turmas que fizeram a tarefa progrediram em suas habilidades de comunicação e de registro. Acrescento a isso o envolvimento dos alunos com a tarefa, que foi significativa para eles.

REFERÊNCIAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática*. Inserir edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

HIEBERT, James et al. *Making Sense*: teaching and learning mathematics with understanting. Portsmouth: Heinemann, 1997.

VALE, Isabel et al. Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. In: ______ (Org.). *Números e álgebra*: na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2006. p. 193-211.

ALUNOS DO 7.º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM UM MOVIMENTO DE (RE) SIGNIFICAÇÃO DE PADRÕES

Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Exerço a docência na Educação Básica desde 1993. Iniciei atuando como professora da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental, depois passei a lecionar Matemática para o Ensino Fundamental e para o Médio. Atualmente sou docente do curso de licenciatura em Matemática. Além disso, em 2008, ingressei no Grucomat (Grupo Colaborativo em Matemática); nele, comecei experiências de trabalho em sala de aula a partir de sequência de tarefas. Os primeiros trabalhos foram voltados para a probabilidade e para a estatística, depois o foco passou a ser os padrões.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2011), o trabalho com padrões é desenvolvido, mais especificamente, no primeiro ano do Ensino Médio; no entanto, algumas atividades que visam a observação da regularidade de sequências numéricas são apresentadas a partir do 6.º ano do Ensino Fundamental. As leituras realizadas no Grucomat — Cyrino e Oliveira (2011), Pimentel (2011) e Ponte, Branco e Matos (2009); — fizeram-me perceber que o estudo de padrões realizado por meio da resolução de problemas pode potencializar a produção de significações e o pensamento algébrico dos alunos da Educação Básica.

Neste texto, relato uma experiência com padrões que desenvolvi em 2013 com alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Dionysia Gerbi Beira1, em que fui professora de Matemática por 12 anos. Nesse período, ministrava aulas em quatro turmas do 7.º ano e desenvolvi as tarefas com todas elas em nossas aulas de Matemática. Cada classe tinha cerca de 30 alunos, com idades entre 11 e 13 anos. Registrei a experiência em um diário de campo, em que anotava o que acontecia nas aulas, e também recolhi os registros dos alunos ao fazer as tarefas.

A sequência construída possuía três tarefas, feitas em sala de aula a partir da proposta de Van de Walle (2009). O autor sugere que a dinâmica da aula seja organizada em três fases: a introdução, momento em que o professor apresenta a tarefa aos alunos; o desenvolvimento, fase em que os alunos desenvolvem a tarefa em grupos; e a socialização, quando as conclusões dos grupos são apresentadas à classe com o objetivo de serem validadas ou não e com o propósito de que a classe desenvolva uma sistematização sobre a tarefa, uma conclusão coletiva.

[1] Escola situada no município de Amparo/SP.

Na fase do desenvolvimento os alunos foram organizados em duplas e trios, quando havia número ímpar de estudantes na sala. A formação das duplas ficou livre, cada um escolheu seu colega.

A primeira tarefa foi a seguinte (Quadro 1):

Quadro 1 – Tarefa 1

Continue o padrão: colocar 1 conta azul no barbante e, em seguida, 1 vermelha, depois 1 azul, 1 vermelha, assim sucessivamente; parar quando tiver colocado 13 contas. *Como poderíamos continuar o padrão? Explique como você pensou.* *Qual será a cor da 20.ª conta? Explique como você sabe disso.* *Qual será a cor da 37.ª conta? Explique como você sabe disso.* *Como você faria para descobrir a cor da conta em uma posição qualquer?*

Fonte: Elaborado pelo Grucomat

Para concretizar essa tarefa, entreguei à cada dupla 13 contas, 7 vermelhas e 6 azuis, um pedaço de cordão específico para confecção de pulseira de contas e uma folha impressa com a tarefa escrita. Nessa fase, os alunos deveriam fazer o registro da tarefa na folha impressa.

Os estudantes não apresentaram dificuldades para responder aos três primeiros itens dessa tarefa nem para justificá-los nos registros escritos. Todos indicaram, no item *a*, que continuariam o padrão com uma conta vermelha; algumas das justificativas foram: “continuaríamos no vermelho, porque a sequência terminou no azul”; “porque depois da azul vem a vermelha”; “porque está explicando que é uma vermelha, depois azul”. Um dos alunos apenas alegou: “tendo mais bolinhas para continuar o padrão”.

No item *b*, apenas um aluno disse que seria azul, os demais afirmaram que seria vermelha. Exponho em seguida alguns dos motivos: “porque antes da vermelha é a azul”; “porque o par é vermelho”; “fiz o desenho”; “eu contei a partir da bolinha azul sete bolinhas e cheguei a essa conclusão”. A dupla que respondeu que seria azul justificou deste modo: “subtraímos 20-13 e deu 7”. Como visto, a última dupla citada subtraiu a quantidade de contas do padrão inicial e, a partir da diferença, fez a contagem no cordão construído.

Todos os alunos responderam, no item *c*, que a cor da 37.ª conta seria azul. Dentre as causas de suas afirmações, estão estas: “porque todo número ímpar é azul”; “contando de um em um”; “continuando o padrão até chegar à 37.ª, fazendo o desenho”; e “porque nós subtraímos 37-13 e deu 24”.

As respostas e as justificativas dadas pelos alunos no item *a* indicam que eles compreenderam a sequência das cores, podendo, assim, antever qual seria a cor da próxima conta. No entanto, determinadas considerações apresentadas nos itens *b* e *c* indicam que há dois grupos de estudantes. Alguns deles precisam de referências visuais para determinar a cor das contas, contando no cordão ou fazendo o desenho. Outros desenvolveram generalizações, perceberam a relação entre a posição da conta e sua cor na sequência, determinado, portanto, que as contas que ocupam posições ímpares são azuis e que as que estão em pontos pares são vermelhas. Essa observação foi possível por conta dos questionamentos dos itens *b* e *c*, que instigaram os alunos a refletirem sobre as cores e a lidarem com a referência visual que possuíam.

A dupla W e L[2] ─ que determinou a cor da conta a partir de subtrações, "subtraímos 20-13 e deu 7" e "subtraímos 37-13 e deu 24" ─ procurou uma regra para não fazer o cálculo conta a conta. Contudo, cometeu um equívoco, pois o padrão apresentado no cordão possui maior número de contas azuis.

A questão "Como você faria para descobrir a cor da conta em uma posição qualquer?" foi composta com o intuito de sistematizar generalizações para determinar o número de contas em quantidade mais elevadas. As respostas dadas por alguns dos estudantes em seus registros ─ "tem que ver a conta que vem antes e depois", "azul ímpar, vermelho par", "fazendo o desenho" e "subtrair o número de bolinhas" ─ indicam que eles ainda mantêm as ideias apresentadas nos itens anteriores.

Na fase da socialização, alguns alunos percebem que cometeram equívocos, outros tiveram suas ideias refutadas pelos colegas, como aconteceu com W e L. A dupla explicou aos colegas as subtrações que fizeram no item *c*, que estavam incompletas no registro escrito:

$$\begin{array}{r} 37 \\ -13 \\ \hline 24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ -\ 13 \\ \hline 11 \end{array}$$

A partir do cálculo, W e L justificaram o que fariam com a diferença da última operação: "*começo no início do barbante*". Alguns colegas disseram que a dupla estava errada, pois perceberam que o padrão não apresentava motivos completos. V disse que poderiam subtrair o número de contas por 12 e, a partir daí, contar. V não descartou a ideia dos colegas W e L para descobrir o número de contas, mas sugeriu que utilizassem um número, anterior ao apresentado, com motivos completos. Esse momento foi importante para que os alunos percebessem que é possível elaborar uma regra para determinar a cor de uma conta qualquer a partir das ideias que registraram e das colocações dos colegas.

Esse fato indica que a proposta de ensino em "três fases", sugerida por de Van de Walle (2009), é importante nas aulas de Matemática, uma vez que favorece a comunicação e a troca de ideias entre os colegas. De acordo com Vigotsky (2001), é por meio da linguagem, gerada no diálogo e desenvolvida com o outro, que o ser humano se apropria do conhecimento e se transforma.

Na sequência, desenvolvemos a seguinte tarefa (Quadro 2):

[2] O nome dos alunos foi substituído por sua inicial para preservar suas identidades.

Quadro 1 – Tarefa 2

Tarefa 2
Continue o padrão: colocar 1 conta azul no barbante e, em seguida 2 vermelhas, depois 1 azul, 2 vermelhas, assim sucessivamente. Parar quando tiver colocado 14 contas.
a) Como poderíamos continuar o padrão?
b) Qual será a cor da 20ª conta? Explique como você sabe disso.
c) Qual será a cor da 36ª conta? Explique como você sabe disso.
d) Como você faria para descobrir a cor da conta em uma posição qualquer?

Fonte: Elaborado pelo Grucomat

De maneira semelhante a anterior, entreguei aos alunos a quantidade de contas necessária para confeccionar o cordão proposto na tarefa e folha impressa para o registro da tarefa na fase de desenvolvimento. Dentre as respostas dadas por eles, selecionei algumas para a discussão dos itens no momento da socialização:

Quadro 3 – Respostas: tarefa 2 (a)

Problemática: (a) Como você poderia continuar o padrão?
Respostas:
1. "Colocando uma azul e duas vermelhas, porque está escrito para continuar o padrão".
2. "Colocando uma azul, porque o padrão terminou no vermelho e poderia ter mais uma bolinha para continuar o padrão".
"Colocando mais uma bolinha vermelha e uma azul, depois duas vermelhas e uma azul, etc.".

Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas dos alunos

As duplas chegaram a diferentes conclusões. A organização de variadas considerações para a discussão foi intencional, pois tinha como objetivo promover discussões sobre a temática no momento de socialização. Para que os alunos pudessem expor suas ideias aos colegas, fiz círculos de papel cartão nas cores vermelha e azul e coloquei fita adesiva no verso para que fossem coladas na lousa, possibilitando a visualização por todos da classe. Também entreguei uma folha impressa com as respostas dos alunos que selecionei para a discussão coletiva.

As respostas 1 e 2 foram contestadas pela classe, os alunos concluíram que não eram adequadas. Eles disseram que apenas a 3 ─ "porque o padrão terminou com uma bolinha vermelha e, teríamos que colocar mais uma vermelha e depois uma azul" ─ era adequada. Essa dinâmica foi desenvolvida na socialização de outros itens da tarefa (Quadro 4).

Quadro 4 – Respostas: tarefa 2 (b)

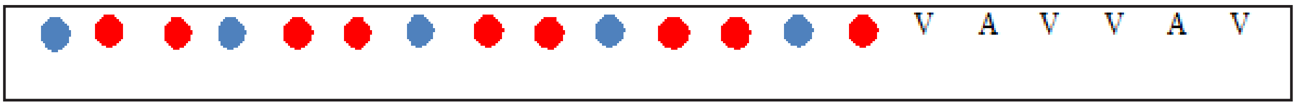
Problemática: (b) Qual seria a cor da 20.ª conta? Como você sabe disso?
Respostas: 4. *"Vermelha. Porque eu subtrai 20-14=6, aí eu contei 6 contas".* 5. *"Será vermelha, porque é par".* 6. *"Azul, porque fomos contando".* 7. *"Vermelha. Continuando a sequência, contando [fez bolinhas azuis e vermelhas para representar a sequência]".*

Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas dos alunos

As respostas dos alunos nesse item sugerem que conceitos elaborados na tarefa 1 foram utilizados por eles. Esse fato é um indicativo de que concepções elaboradas pelos alunos em situações anteriores, escolares e até mesmo cotidianas, são retomadas em contextos semelhantes. Novamente a fase da socialização foi um momento importante para a reflexão sobre os conceitos apresentados.

Alguns alunos questionaram a forma como os colegas escreveram, disseram que poderiam ter explicado melhor. A princípio, contestaram a resposta 5, afirmando que essa sequência não tem relação entre par e ímpar, como na primeira tarefa. A resposta 6 também foi rebatida por vários alunos da classe, pois a maioria respondeu vermelho. Um aluno se levantou e continuou a sequência de 14 círculos colocados na lousa com as letras das respectivas cores para mostrar aos colegas que a 20.ª conta seria da cor vermelha. A representação ficou da seguinte forma (Figura 1):

Figura 1 – Representação visual: tarefa 2



Fonte: Adaptado pela pesquisadora a partir da representação do aluno

A representação do aluno foi importante para que os outros, que disseram que a próxima seria azul, fossem convencidos de que seria vermelha, como apontado na resposta 7. Além disso, é significativo que alunos observem diferentes formas de registro, como essa, com formas e letras.

Novamente, W e L usaram a subtração para determinar o número da 20.ª conta e, como na tarefa 1, subtraíram o padrão das contas com número de motivos incompletos. É possível que eles tenham se apoiado na ideia de par, pois na primeira tarefa foi sugerido que deveriam subtrair o número 12.

O fato de W e L terem dado a resposta certa, "vermelha", tirou a atenção dos colegas para sua justificativa, foi preciso minha intervenção com o questionamento "*Por que subtraíram 20 por 14, na resposta 4?*" para se atentarem. De imediato, disseram que havia 14 contas no cordão, mas uma aluna assinalou que não poderia ser 14, porque "*a sequência não estava completa, precisa de uma conta vermelha*". Questionei-os novamente: "*e qual deveria ser o número?*". Eles afirmaram que era "*12 ou até o 15*", porque "*teriam sequência completas*". Percebo nessa fase a importância do outro — professor e colegas de turma — e das ideias desenvolvidas em momento anterior para o movimento de (re)significação de conceitos sobre padrão.

No item *c* outras considerações foram apresentadas pelos alunos (Quadro 5):

Quadro 5 − Respostas: tarefa 2 (c)

Problemática: (c) Qual será a cor da 36ª conta? Como você sabe disso?
Respostas:
8. *"Vermelha. Continuando a sequência: AVVAVVAVVAVVAVV AVVAVVAVVAVVAVVAVVAVV".*
9. "É vermelha. Voltamos para o começo, tirando as duas primeiras até a 36ª".
10. "Vermelha. Contaria pela tabuada".

Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas dos alunos

A resposta 9 foi questionada pela turma, um dos alunos afirmou: "*não tem que tirar as duas primeiras contas, porque a sequência não ficaria completa*". As alunas que deram essa resposta argumentaram que a sequência ficaria completa deste modo: "*VAV-VAV-VAV-VAV*". A turma ficou um pouco confusa com as duas colocações, e precisei intervir com a pergunta: "*A sequência ficou completa?*". Os alunos, sem muita certeza, falaram que sim; voltei a questioná-los: "*Esse padrão é o mesmo que o outro?*". Com isso, os alunos observaram que a sequência estava completa, mas não era a mesma que a anterior, e concluíram que o correto seria tirar as duas últimas cores; desse modo, a sequência estaria completa.

A problemática apresentada no item *d* possibilitou que diferentes ideias fossem expostas (Quadro 6):

Quadro 6 − Respostas: tarefa 2 (d)

Problemática: (d) Como você faria para descobrir a cor da conta em uma posição qualquer?
Respostas:
11. *"Contaríamos: azul, vermelho, vermelho, azul, etc.".*
12. "Eu subtraía 12 do número que se pede. Se o número for grande eu uso a tabuada do doze".
13. "Se eu for contando de três em três consigo descobrir, mas se o número for muito grande fica difícil".
14. "Os múltiplos de três são vermelhos e, olhando o resto da divisão por três também dá para saber. Quanto o resto for 0 ou 2 a conta é vermelha, se for 1 é azul".

Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas dos alunos

De diferentes formas, os alunos resolvem a problemática de descobrir a cor da conta em uma posição qualquer. Há distintos níveis de generalizações em suas respostas, como a de calcular de conta a conta, de ir contando de 3 em 3, de subtrair 12 do número que se pede, de se basear na tabuada do 12 e de analisar o resto da divisão por 3.

A última resolução, que propõe analisar o resto da divisão, não foi uma descoberta espontânea das alunas B e G. Elas me chamaram, estavam intrigadas, não queriam seguir o método de ir conta a conta, achavam que poderiam encontrar uma forma mais prática, mas não sabiam como. A partir desse desejo, iniciamos um diálogo:

> *Prof.ª: Se o exemplo fosse o número 344, como fariam para descobrir a cor da conta?*
> *T: Não sabemos.*
> *Prof.ª: Vocês sabem quantos motivos há em 344?*
> *G: Não, tem que fazer a conta?*
> *Prof.ª: Que conta?*
> [Fizeram uma multiplicação. Multiplicaram o número contas do motivo, 3, pelo número solicitado, 344.]
> *T: Não, acho que é divisão.*
> [Fizeram a divisão.]
> *Prof.ª: Quantos motivos há?*
> *G: 114.*
> *Prof.ª: E o resto da divisão, neste caso, o que significa?*
> *G: Que sobrou bolinhas fora do motivo.*
> [Retornaram na primeira conta do padrão e contaram até dois.]
> *T: É vermelha.*
> *[Riram]*
> *Alunas: É muito fácil!* [Riram novamente]

Repetimos a experiência com os números *613*, *614* e *615*. As alunas concluíram que, para descobrir a cor da conta em uma posição, bastava dividir o número de contas por 3 e verificar o resto: se for 0 e 2, a conta será vermelha; se for 1, azul. Essa conclusão foi compartilhada com a classe na socialização. Nesse momento, questionei: "*E se o motivo fosse outro, por exemplo, azul, azul, vermelho, vermelho; como seria?*". As alunas disseram que dividiriam o número de contas por 4 e depois analisariam o resto, como fizeram.

Com essas colocações, a classe concluiu que, para descobrir a cor da conta em uma posição qualquer, era necessário dividir o número total de contas pela quantidade de contas do motivo e usar o resto dessa divisão para a contagem no início da sequência. Também foi pontuado que o quociente não interfere na definição da cor da conta.

Depois dessa tarefa, desenvolvemos a última (Quadro 7).

Quadro 7 – Tarefa 3

Invente um padrão diferente que tenha uma regularidade, acrescentando uma terceira cor. Elabore perguntas relacionando a posição e a cor das contas no barbante. Troque com seu colega para que ele possa responder as suas perguntas.

Fonte: Elaborado pelo Grucomat

Os padrões criados pelos alunos foram os seguintes:

A, V, P, P	*P, P, V, V, A*	*A, P, P, V, V*
A, A, V, P	*P, P, P, A, V*	*A, A, P, P, V, V*
P, P, V, A	*P, P, A, V, V*	*A, P, P, A, V, V*
P, V, V, A	*A, A, V, P, P*	*P, P, V, V, A, A,*

As cores utilizadas foram vermelha, azul e preta. Algumas duplas utilizaram letras para representar o padrão, outros desenharam círculos com as respectivas cores. A partir dos padrões criados, os alunos elaboraram alguns questionamentos, feitos aos colegas, como:

> *"Descubra a cor da 99.ª conta. Explique como você sabe disso".*
> *"Qual a cor da conta de n.º 42? Como você sabe disso?".*
> *"Como você faria para descobrir a cor da conta numa posição qualquer?".*
> *"Qual é a cor da próxima conta da sequência?".*
> *"Como você descobriria a cor da conta de 1000?".*
> *"Quantas contas azuis terão até o número 2000?".*

Esse processo de elaboração de problema não é simples, envolve certo conhecimento sobre a temática, pois o problema proposto tem por objetivo desenvolver conceitos matemáticos e também habilidades de escrita, visto que a tarefa é direcionada para outro colega, um leitor. Dessa forma, a tarefa 3 possibilita o trabalho com textos na sala de aula, pois envolve a relação com um gênero textual, o problema, que é um texto instrucional. Segundo Luvison e Grando (2012, p. 154),

> em um ambiente de leitura, escrita e resolução de problemas de jogo, os alunos apropriam-se da linguagem e dos conceitos matemáticos, quando elucidados através de um contexto de investigações, em que a inferência, o dialogismo e a relação leitor-autor ajudam a constituir e a desenvolver cada sujeito que, enquanto escreve, lê e comunica, (re) significa o conhecimento matemático.

Para Smolka (2010), é importante explorar, nas relações de ensino, a compreensão da produção de sentidos, pois o trabalho simbólico das interações possibilita pensar na dinâmica interdiscursiva em diferentes dimensões: individual, social e ideológica. De acordo com Núñez (2009), as condições em que os conceitos espontâneos, desenvolvidos no cotidiano, e os científicos, produzidos em contexto escolar, constituem-se são diversos; porém, a organização e a sistematização do processo de ensino e aprendizagem podem conduzir o aluno à construção do pensamento conceitual.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho realizado possibilitou que habilidades de leitura e escrita pudessem ser desenvolvidas de forma significativa no decorrer das aulas de matemática. Isso porque diversas ações eram produzidas pelos alunos não apenas para si, mas também para o outro, seja no registro para análise ou nos questionamentos que teriam que responder.

As problematizações geradas pelas tarefas permitiram que o processo de elaboração conceitual e o pensamento algébrico fossem emergindo em um movimento entrelaçado, um (re) significando o desenvolvimento do outro. Nos discursos e nos registros dos alunos, a linguagem falada pode ser considerada um recurso importante para a estruturação da linguagem simbólica e, nesse contexto, da linguagem sincopada, uma forma simplificada de escrita, considerada importante, pois, segundo Moura e Sousa (2005, p. 19), "está muito próxima da linguagem simbólica".

O trabalho realizado com a sequência de tarefas oportunizou a produção de conceitos sobre padrões pelos alunos do 7.º ano da Educação Básica. Todo esse processo, como visto, foi marcado pela (re)significação e mediado pela linguagem e pela interação entre professora e alunos, promovida pela dinâmica de ensino.

REFERÊNCIAS

CYRINO, Márcia; OLIVEIRA, Hélia. Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema*, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 97-126, 2011.

LUVISON, Cidinéia; GRANDO, Regina. Gêneros textuais e a matemática: uma articulação possível no contexto da sala de aula. *Revista Reflexão e Ação*, Santa Cruz do Sul, v. 20, n. 2, p.154-185, jul.-dez. 2012. Disponível em: <http://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/article/view/3035/2244>. Acesso em: 08 abr. 2015.

MOURA, Anna Regina; SOUSA, Maria do Carmo. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. *Zetetiké*, Campinas, v. 13, n. 24, p. 11-45, jul.-dez. 2005. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/viewFile/2445/2207>. Acesso em: 02 ago. 2016.

NÚÑEZ, Isauro Beltrán. *Vygotsky, Leontiev, Galperin*: formação de conceitos e princípios didáticos. 1ª ed. Brasília: Liber Livro, 2009.

PIMENTEL, Isabel (Coord.). *Padrões em matemática*: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico. 1ª ed. Lisboa: Texto Editores, 2011.

PONTE, João P.; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. *Álgebra no ensino básico*. Brasília: Ministério da Educação, 2009. Disponível em: <http://aveordemsantiago.pt/pdfs/novos_programas/matematica/ensino_basico/algebra.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2015.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. ***Currículo do estado de São Paulo**:* linguagens, códigos e suas tecnologias. 2. ed. São Paulo: SE, 2011. 260 p.

SMOLKA, Ana Lúcia. Ensinar e significar: as relações de ensino em questão ou das (não)coincidências nas relações de ensino. In: SMOLKA, A. L. B.; NOGUEIRA, A. L. H. (Org.). *Questões de desenvolvimento humano*: práticas e sentidos. Campinas: Mercado de Letras, 2010. p. 107-128.

VAN DE WALLE, John A. *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIGOTSKY, Lev. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução Paulo Bezerra. 1ª. Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

A CADA NOVA EXPERIÊNCIA, UMA NOVA APRENDIZAGEM

Kelly Cristina Betereli

Licenciei-me em Matemática em 2008, e já lecionei em escolas públicas e particulares, no Ensino Fundamental e no Médio. Fiz mestrado em Educação e participo do Grucomat (Grupo Colaborativo em Matemática). Hoje atuo como professora em uma universidade e também em uma escola particular. Nesta última realizei uma experiência nova em minha prática docente, que envolveu atividades de sequências e padrões. Narrarei essa vivência neste capítulo.

Freitas e Fiorentini (2007, p. 64) defendem que a narrativa é o "modo de produzir sentido à experiência". Para esses autores,

> experiências em sala de aula e ambiente de pesquisa podem ilustrar o potencial da narrativa para o ensino e a aprendizagem da matemática. Nada mais natural do que adotar a narrativa para tentar dar sentido a uma experiência educativa ou a uma prática social. As salas de aula podem ser vistas como uma prática social complexa em que professores, alunos e por vezes pesquisadores estão tentando compreender e construir significados. É assim que alguns professores de matemática exploram, em sala de aula, experiências de contar e narrar ao outro, pois estas, além de formativas, podem, também, ajudar na aquisição significativa do conhecimento matemático. (FREITAS; FIORENTINI, 2007, p. 65)

Esses autores, apoiando-se em Clandinin (1993 apud FREITAS; FIORENTINI, 2007, p. 66), afirmam que o professor, ao narrar, aprende e ensina:

> Aprende, porque, ao narrar organiza suas ideias, sistematiza suas experiências, produz sentido a elas e, portanto, novos aprendizados para si. Ensina, porque o outro, diante das narrativas e dos saberes de experiências do colega, pode (re)significar seus próprios saberes e experiências.

A atividade sobre padrões e sequências foi desenvolvida com os alunos do 7.º e do 8.º ano de uma escola particular da cidade de Itatiba/SP. Nessa escola há apenas uma classe de cada ano do Ensino Fundamental II, e sou a única professora de Matemática desse grupo de salas; portanto, após os alunos chegarem ao 6.º ano, essas aulas são ministradas por mim durante os 4 anos do ciclo.

Esse convívio contínuo entre mim e os alunos tem pontos positivos. Dentre eles, está meu amplo conhecimento de cada um deles. Identifico suas dificuldades e, como as salas são pequenas em relação ao número de alunos, consigo fazer um trabalho bem direcionado a cada turma. Conhecer bem esse cotidiano escolar me permite dizer que nele não cumprimos meramente a rotina, nem somente realizamos atividades que se repetem, mas inovamos a cada ano.

Porém, há pontos negativos. Penso, por exemplo, na relação professor-aluno. Estudos mostram que o papel dos professores e sua capacidade de relacionamento pessoal com os alunos são essenciais no ensino e na aprendizagem da matemática, influenciando nesta. Como afirma Charlot (2005), o tipo de relacionamento entre professor e aluno acaba por levar os estudantes a estabelecer ou não relações com o saber. Quando existe uma antipatia do aluno em relação ao professor, este não consegue despertar no estudante o desejo de aprender, não consegue fazê-lo entender o sentido do aprender. Nesse caso, os grupos para os quais dou aula não têm oportunidade de conhecer outro professor de Matemática em todo o ciclo.

Nessa escola, trabalhamos com material apostilado, que segue o método socioconstrutivista. Eu, como professora-pesquisadora, participante do Grucomat, às vezes fico um pouco incomodada com a metodologia usada para abordar alguns conteúdos. Quando isso acontece, a escola me dá total liberdade de trabalhar com os alunos de forma diferente da indicada no material, sempre com o compromisso de melhorar ainda mais o processo de ensino-aprendizagem.

Durante os seis anos que estou lecionando para essas turmas, sempre introduzi o conteúdo de álgebra. Este se inicia no 7.º ano por meio das indicações da apostila, que começam com expressões algébricas, fórmulas, operações e muitos exercícios de fixação. Decidi modificar essas aulas propondo aos alunos atividades sobre padrões e sequências, já que

> quando apelamos aos padrões no ensino da Matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, facultando-lhe um ambiente que relacione com a sua realidade e experiência. O estudo de padrões vai de encontro a este propósito, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem conjecturas, previsões e também generalizações. (VALE, 2011, p. 9)

As atividades aqui relatadas foram feitas com alunos do 7.º ano, que iriam começar a ver as expressões algébricas, e também com estudantes do 8.º ano, que iriam aprender operações com polinômios.

Os alunos já estão acostumados a trabalhar em grupos com atividades que não estão nas apostilas. Faço isso com frequência, mas apenas com o conteúdo de geometria. Viso, desse modo, romper com o tratamento de alguns conteúdos meramente quantitativos de dados e dar ao ensino-aprendizagem um caráter mais experimental e exploratório, com mais intervenção do professor e mais construção dos alunos. No conteúdo de álgebra, foi uma experiência nova; não tenho ainda muita segurança com o modo de realizá-la, mas o intuito é o mesmo do trabalho com a geometria.

Como já exposto, as turmas nessa escola são pequenas. Na sala do 7.º ano trabalho com 8 alunos, as atividades propostas foram realizadas em 4 duplas, que eles mesmos organizaram. Já no 8.º ano temos 15 alunos, que se organizaram em 6 duplas e 1 trio. O desenvolvimento das atividades foi filmado, isso constrangeu um pouco alguns alunos no início, mas depois de um tempo eles se acostumaram com a câmera.

ATIVIDADE COM O 7.º ANO

As atividades desenvolvidas utilizavam materiais manipuláveis (fio de contas). Tinham como objetivo verificar se o aluno é capaz de reconhecer o motivo de uma sequência pela percepção de sua regularidade e generalizar o motivo de uma sequência.

Depois de os alunos se organizarem em duplas, expliquei que faríamos uma atividade diferente. Distribui a folhinha com a proposta e também as contas com um pedaço de barbante para que eles pudessem manusear e resolver as questões. Li a primeira pergunta para eles e interroguei se eles haviam entendido o que era para fazer (Quadro 1).

Quadro 1 – Tarefa proposta aos alunos

Continue o padrão: colocar 1 conta azul no barbante e, em seguida 1 vermelha, depois 1 azul, 1 vermelha, assim sucessivamente, formando um colar. Parar quando tiver colocado 13 contas. Perguntar às crianças:

a) Como poderíamos continuar o padrão?

b) Qual será a cor da 20.ª conta? Como você sabe disso?

c) Qual será a cor da 37.ª conta? Como você sabe disso?

d) Existe alguma relação entre a cor da conta e sua posição no colar?

Fonte: Acervo do Grucomat

Os estudantes responderam, oralmente, de diversos modos a primeira pergunta. Segue abaixo as falas de dois alunos:

> *Rafael: padrão é a mesma coisa que contínuo, então, era pra dar continuidade na sequência mantendo as cores informadas.*
> *Amanda: padrão é aquilo que se repete, então era só repetir o enunciado do problema sucessivamente.*

Os demais alunos concordaram e iniciaram o trabalho. Eu não disse mais nada e os deixei fazerem as questões para perceber se teriam alguma dificuldade e para identificar como ela se manifestaria. Assim que todos acabaram, solicitei que socializassem suas resoluções. Durante a resolução da tarefa, eles não fizeram nenhum questionamento, mas discutiram bastante entre as duplas.

Julia e Lavínia quiseram responder à questão *a* e disseram que a próxima conta seria azul. Essa colocação gerou um alvoroço na sala, pois os colegas diziam que a 14.ª conta seria vermelha. Letícia pontuou: "*não tem como isso acontecer, pois todas as contas azuis serão ímpar, e todas vermelhas serão par, a 14.ª será, então, vermelha*".

Julia e Lavínia pensaram um pouco e já perceberam o erro. Iniciaram o cordão de contas como foi solicitado. Porém, ao colocarem a 14.ª conta, entenderam que começaria novamente pela azul, ou seja, elas não tinham entendido qual era o padrão, foram colocando as 13 contas, mas não perceberam a regularidade de cada posição em relação a cada cor, depois da fala da Letícia e de construírem o cordão novamente é que perceberam. As questões *b*, *c* e *d* foram respondidas sem nenhuma dificuldade, já que sabiam que as azuis ocupariam uma posição ímpar e que as vermelhas teriam uma posição par.

Na próxima atividade (Quadro 2) continuei em silêncio. Deixei que os alunos a fizessem sozinhos; afinal, disseram que sabiam o que era um padrão, uma sequência...

Quadro 2 – Tarefa proposta aos alunos

Continue o padrão: colocar 1 conta azul no barbante e, em seguida 2 vermelhas, depois 1 azul, 2 vermelhas, assim sucessivamente, formando um colar. Parar quando tiver colocado 14 contas. Perguntar às crianças:
a) Como poderíamos continuar o padrão?
b) Qual será a cor da 20.ª conta? Como você sabe disso?
c) Qual será a cor da conta 36.ª? Como você sabe disso?
d) Existe alguma relação entre a cor da conta e sua posição no colar?

Fonte: Acervo do Grucomat

Os alunos completaram seu colar de contas com a sequência sugerida. Logo, Amanda e Letícia falaram que a 36.ª conta seria azul.

Figura 1 – Amanda e Letícia separando a primeira conta das demais

Fonte: Arquivo da pesquisa

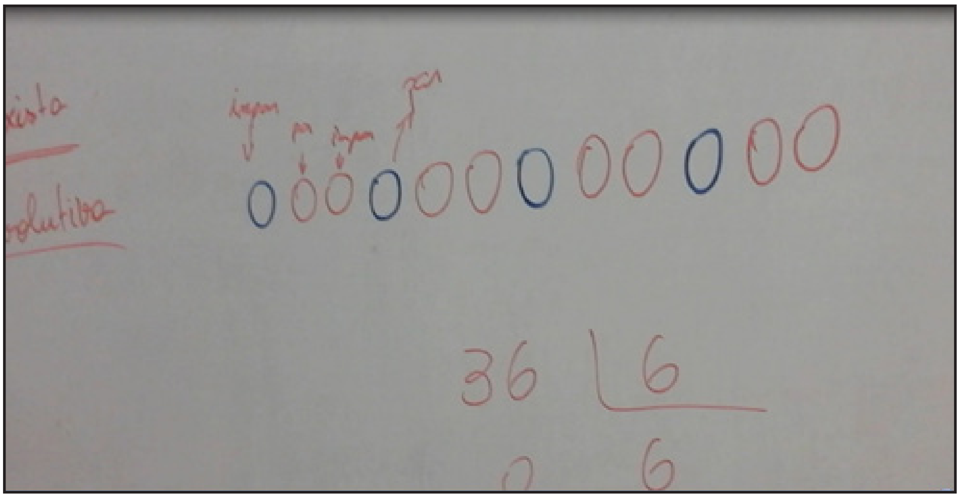
Perguntei a elas como tinham chegado a essa conclusão, e elas fizeram um esclarecimento, registrado na Foto 1. Elas separaram a primeira conta das demais e acabaram se perdendo nas contas.

Outras duas duplas disseram que a 36.ª conta seria vermelha, porque eles fizeram a contagem. Já a dupla Rafael e Diogo surpreendeu. Rafael falou: "*eu dividi 36 por 6, e o resultado foi 6, logo a 6.ª conta será vermelha, então a 36.ª também será*".

Os colegas não entenderam seu raciocínio. Com isso, perguntei a ele o porquê de ter feito essa conta, mas o aluno não conseguiu explicar. Continuou discutindo com seu parceiro e tentou levantar outra hipótese:

> *Rafael: [...] se o algarismo do número acabar em um, a conta será verde; se acabar com dois, será vermelha, em três será vermelha.*
> *Professora: Então, a 13.ª conta será vermelha?*

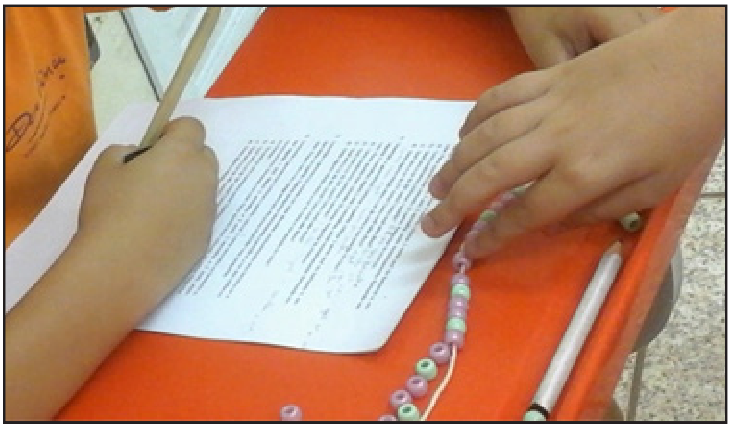
Figura 2 − Intervenção na lousa



Fonte: Arquivo da pesquisa

Rafael percebeu que sua hipótese não se confirmou, mas não desistiu e continuou tentando achar um porquê. É visível que intuitivamente Rafael já entendeu e tem o pensamento algébrico, porém ainda não consegue socializar seu raciocínio formalmente.

Figura 3 – Rafael discutindo com o parceiro, Diogo



Fonte: Arquivo da pesquisa

ATIVIDADE COM O 8.º ANO

A primeira atividade de sequência apresentada para essa turma foi diferente da indicada para o 7.º ano. Apesar de nunca ter trabalhado com esse tipo de atividade com eles, eles já haviam aprendido expressões e operações algébricas e equação de 1.º grau e estavam vendo o conteúdo de produtos notáveis. Achei que essa atividade, que tem um nível de dificuldade um pouco maior que a desenvolvida pelo 7.º ano, constituiria um desafio maior aos alunos.

Nessa tarefa, utilizamos materiais manipuláveis. Com ela, objetivei verificar se o aluno era capaz de reconhecer o motivo de uma sequência pela percepção de sua regularidade, de generalizar o motivo de uma sequência e, por fim, de generalizar algebricamente a sequência, ou seja, determinar uma fórmula geral.

Distribuí as folhas com as atividades para as duplas. Fiz uma leitura da primeira questão com eles e perguntei se tinham entendido a proposta do exercício. Todos responderam que sim. Então, disse que eles fariam os quatro primeiros exercícios e que, depois disso, socializaríamos o que cada dupla teria desenvolvido.

Figura 4 – Folha distribuída às duplas

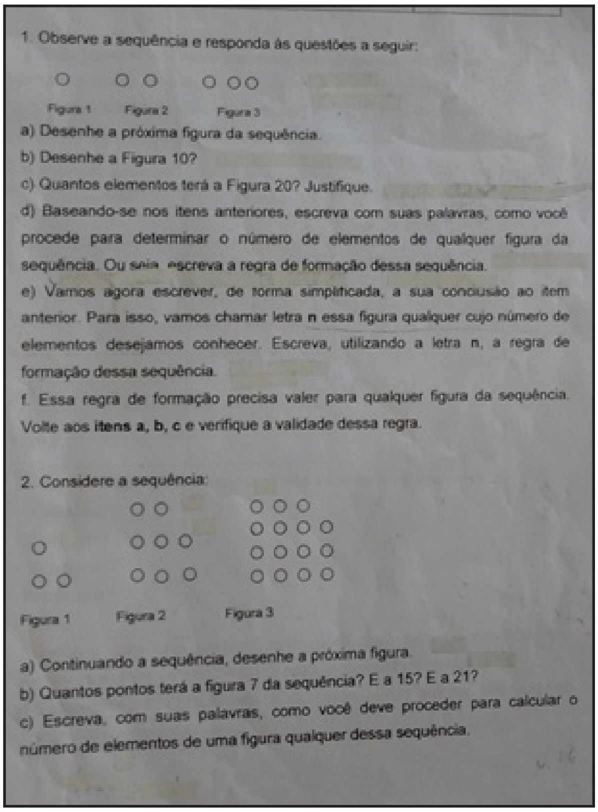

1. Observe a sequência e responda às questões a seguir:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Desenhe a próxima figura da sequência.

b) Desenhe a Figura 10?

c) Quantos elementos terá a Figura 20? Justifique.

d) Baseando-se nos itens anteriores, escreva com suas palavras, como você procede para determinar o número de elementos de qualquer figura da sequência. Ou seja, escreva a regra de formação dessa sequência.

e) Vamos agora escrever, de forma simplificada, a sua conclusão ao item anterior. Para isso, vamos chamar letra **n** essa figura qualquer cujo número de elementos desejamos conhecer. Escreva, utilizando a letra n, a regra de formação dessa sequência.

f. Essa regra de formação precisa valer para qualquer figura da sequência. Volte aos **itens a, b, c** e verifique a validade dessa regra.

2. Considere a sequência:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Continuando a sequência, desenhe a próxima figura.

b) Quantos pontos terá a figura 7 da sequência? E a 15? E a 21?

c) Escreva, com suas palavras, como você deve proceder para calcular o número de elementos de uma figura qualquer dessa sequência.

Fonte: Arquivo da pesquisa

Quanto às questões 1 e 2, os grupos não tiveram nenhuma dificuldade em responder os itens *a*, *b* e *c*. Porém, quando precisaram escrever a regra de formação houve complicações. Não sei se minha intervenção estava adequada, pois esse era meu primeiro trabalho envolvendo sequências. Percebi que me atrapalhei quando quis ajudá-los, e eles não estavam entendendo o que deveriam fazer. Apenas dois grupos mostraram compreender um pouco o que estava sendo pedido e tentaram achar a solução; os outros se desmotivaram e falaram que estava muito difícil, realmente não estavam entendendo o que eu queria que eles fizessem. Perante esse fato e diante do fim da aula, disse a eles que retomaria a atividade em nosso próximo encontro, porém levei outra proposta.

Resolvi propor para a turma a mesma atividade que havia desenvolvido com o 7.º ano, mas sem a utilização do material concreto. Optei por não usar materiais manipuláveis para verificar se eles já conseguiam fazer abstrações. Isso porque havia trabalhado com eles no 6.º e no 7.º ano com atividades no campo da geometria, sempre com materiais manipuláveis, e depois fizemos outras atividades que envolveram o mesmo conceito sem o material para que eles pudessem fazer as abstrações. Como se tratava do 8.º ano, imaginei que os estudantes já teriam alguma habilidade com tais abstrações.

Levei, portanto, na aula seguinte a atividade destacada nos Quadros 3 e 4. Expliquei que eles não usariam as contas, mas que poderiam desenhar ou ainda encontrar outra estratégia para a resolução.

Quadro 3 – Primeiro exercício proposto

Continue o padrão: colocar 1 conta azul no barbante e, em seguida, 1 vermelha, depois 1 azul, 1 vermelha, assim sucessivamente, formando um colar. Para quando tiver colocado 13 contas. Perguntar às crianças:a

a) Como poderíamos continuar o padrão?

b) Qual será a cor da 20.ª conta? Como você sabe disso?

c) Qual será a cor da 37.ª conta? Como você sabe disso?

d) Existe alguma relação entre a cor da conta e sua posição no colar?

Fonte: Arquivo do Grucomat

Quadro 4 – Segunda proposta

Um professor propõe aos seus alunos: escreva os três termos seguintes da sequência numérica: 1,2,4, ...

Alguns alunos apresentaram as seguintes sequências, com os três próximos termos:

Aluno A: 1, 2, 4, 8, 16, 32

Aluno B: 1, 2, 4, 7, 11, 16

Aluno C: 1, 2, 4, 5, 7, 8

Aluno D: 1, 2, 4, 1, 2, 4

Aluno E: 1, 2, 4, 4, 2, 1

Identifique qual o padrão adotado por cada aluno.

Fonte: Arquivo de pesquisa

Nas duas primeiras atividades, os alunos não tiveram muita dificuldade, logo perceberam que o padrão da primeira atividade era ímpar para as contas azuis e par para as vermelhas. Na segunda atividade, a maioria percebeu que se o número total das contas fosse dividido por três, era possível trabalhar com o resto, que seria zero ou dois, se a conta fosse vermelha, e um, se fosse azul.

Fomos para o terceiro exercício. Cada dupla identificou o padrão das sequências. Indico a seguir o registro escrito dos alunos:

> *Lucas e Murilo: O aluno A pegou o número da frente e fez vezes 2, aí, ele tinha como resultado o próximo número da sequência.*
> *Breno e João G.: O aluno B pega o número e soma a ele o sucessor do número anterior, obtendo como resposta o próximo número da sequência.*
> *Vittória e Laura: O aluno C acrescenta ao número inicial 1, no próximo acrescenta 2, ao resultado deste acrescenta 1, ao resultado acrescenta 2 e assim sucessivamente.*
> *Fred, João C. e Enzo: O aluno D toma como padrão a sequência 1, 2 4 e vai repetindo-a sucessivamente 1, 2, 4.*
> *Nícolas e Julia: O aluno E escreve a sequência 1, 2, 4 e depois inverte a sequência para 4, 2, 1, a próxima deve ficar 1, 2, 4 novamente.*

Pedi, então, para que fizessem a proposta do Quadro 5.

Quadro 5 – Quarto exercício proposto

Escreva os quatro próximos termos da sequência 1, 4, 9, 16, 25 e explique o padrão que você adotou. *Encontre um segredo para essa sequência e continue: 2, 6, 12, 20. Acrescente mais 4 números à sequência de forma que seja possível encontrar a lei de formação.*

Fonte: Arquivo da pesquisa

Na hora da socialização, eu chamava as duplas para irem à lousa explicar para os colegas como tinham feito a resolução. A aluna Laura, que fazia dupla com Júlia, afirmou: "*os próximos termos da sequência são 36, 49, 64, 81 e 100. Chegamos nessa conclusão porque percebemos que é o número elevado ao quadrado, esse é o padrão*".

Como os demais tinham percebido a mesma regularidade, chamei outra dupla para discutir a próxima tarefa.

> *Livia e Lavínia: Os próximos números são 30, 42, 56 e 72. Foi difícil! Mas vimos que, se começarmos pela 2 + 4 = 6, aí faz 4 (da conta anterior) + 2 = 6, que fazendo 6 + 6 = 12; depois faz 6 (da conta anterior) + 2 = 8, que fazendo 8 + 12 = 20. O próximo pega 8 (da conta anterior) e faz 8 + 2 = 10, assim 20 + 10 = 30, pega 10 (da conta anterior) + 2 = 12 e 12 + 30 = 42, assim sucessivamente.*

As outras duplas não conseguiram encontrar um padrão para essa sequência. Lancei um desafio a eles, que estavam bem envolvidos com a atividade:

Lembram-se da outra atividade que nós a abandonamos, porque estava muito difícil? Então, o desafio agora é conseguirmos retornar àquela atividade, porém, para isso, vamos tentar descobrir uma lei de formação para cada uma dessas situações que vocês acabaram de fazer. Ou seja, vocês vão tentar escrever em linguagem matemática, o que vocês escreveram em linguagem corrente, vamos fazer uma tradução desses padrões que vocês encontraram de forma algébrica.

Alguns, nesse momento, desanimaram um pouco dizendo: "*Estava fácil até agora para ser verdade!*"; "*Tem mesmo que escrever matematicamente?*". Outros adoraram o desafio e já começaram a discutir com seus pares. Para motivar aqueles que já estavam pensando em desistir, fui para a lousa e disse que daria uma dica para que ficasse mais fácil. Sugeri que fizessem uma tabela do 1.º exercício (aluno A), conforme a Tabela 1, e, a partir dela, construírem uma relação com o que tinham registrado em linguagem corrente.

Tabela 1 – Exercício 1 (aluno A)

POSIÇÃO "X"	NÚMERO CORRESPONDENTE
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

Fonte: Construção em sala pelos alunos

Diálogo entre professora e classe:

Professora: Vocês disseram que o aluno A pegava o número e fazia vezes dois para dar o próximo número da sequência. Qual a operação que posso fazer para simplificar uma multiplicação de fatores iguais?
Classe: Potenciação.
Professora: Muito bem! Como nosso objetivo é fazermos uma lei de formação para essa sequência, ou seja, uma expressão algébrica, e sabemos que essa lei deve ser uma generalização para qualquer posição da sequência e que todo expressão algébrica precisa ter letras para generalizar, vamos chamar a posição de x. Agora, prestem atenção na pergunta. Olhando para a sequência na tabela, esses resultados, que vocês disseram que são obtidos a partir do dobro do anterior, pode ser escrito de outra forma?".
Classe: Pode sim. Pode ser potência de 2, porque $2 \times 2 = 2^2 = 4$; $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$.
Professora: Muito bem! Então, como eu faço para conseguir o resultado 1?
Breno: qualquer número elevado a zero.
Professora: E pra conseguir como resposta o número 2?
Breno: Já sei! $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$.
Professora: Mas essa sequência não é algébrica, cadê a letra para generalizarmos, onde vamos colocar?
Breno: Se chamarmos a posição de x, dá pra perceber que as posições ficaram nos expoentes; então, é só fazer 2^x.

Professora: Uma salva de palpas...

Tudo parecia ter ficado muito mais claro, e eles agora queriam fazer todos as tarefas e encontrar os padrões algebricamente. Deram continuidade às tarefas. A dupla Breno e João G. quis socializar o que conseguiu com as sequências.

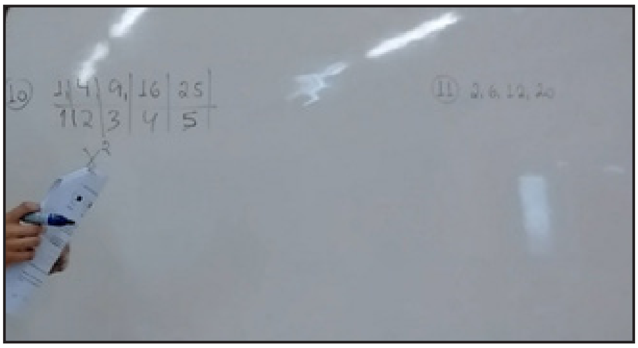
Quadro 6 – Enunciado do exercício resolvido pela dupla Breno e João G

Escreva os quatro próximos termos da sequência 1, 4, 9, 16, 25 e explique o padrão que você adotou.

Encontre um segredo para essa sequência e continue: 2, 6, 12, 20. Acrescente mais 4 números à sequência de forma que seja possível encontrar a lei de formação.

Fonte: Acervo da professora

Figura 5 – Breno socializando a resolução com a sala



Fonte: Arquivo da pesquisa

Breno: para a primeira sequência, fizemos uma tabela conforme a professora deu a dica. A segunda linha (linha de baixo) é a posição de cada número da linha de cima. Aí, observamos que se fizéssemos a posição elevado ao quadrado obteríamos cada um dos números da primeira linha. Chamando os números das posições de x, encontramos como lei de formação geral x². Assim, a sexta posição será 6² = 36; a sétima posição 7² = 49, e assim sucessivamente.

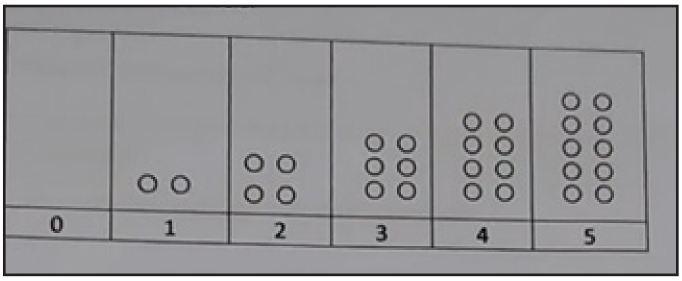
Breno estava tão empolgado e satisfeito consigo mesmo que pediu para fazer o próximo exercício.

Breno: na segunda sequência também fizemos uma tabela, porque nós não tínhamos conseguido ver nenhuma regularidade, nem quando a Lívia e a Lavínia fizeram na lousa. Depois de construir a tabela, percebemos que a posição um, vezes sua posição sucessiva, 2, (1 x 2) dava 2; depois, pegando a posição 2 e fazendo vezes a posição 3, dava 6, e assim sucessivamente. Então, chamamos a posição de x e pensamos que o sucessor de x é (x+1); então, é só fazer x(x+1), e é essa a lei de formação para qualquer posição.

Os alunos como um todo conseguiram fazer as tarefas, mas queriam voltar àquelas que havíamos abandonado por estarem muito perdidos (Figura 3). Disponibilizei mais duas aulas para que eles pudessem voltar naquelas atividades, e o resultado foi muito bom. Lucas e Murilo quiseram socializar com os colegas a forma como pensaram.

Figura 6 – Enunciado da atividade socializada por Lucas e Murilo

Vamos voltar a primeira tira de números e organizar os números vermelhos por meio de pontos. Observe a tabela:



1. Quando na segunda linha da tabela aparecer o número 37, quantos pontos serão desenhados na primeira linha? _______________. Como você sabe disso?

2. Se houver 48 pontos desenhados, qual é o número que estará registrado na segunda linha da tabela? ________________. Como você sabe disso?

3. Marina disse aos colegas que descobriu uma fórmula para representar a quantidade de pontos vermelhos desenhados: R=2n. O que você acha que R representa nessa fórmula? E n?

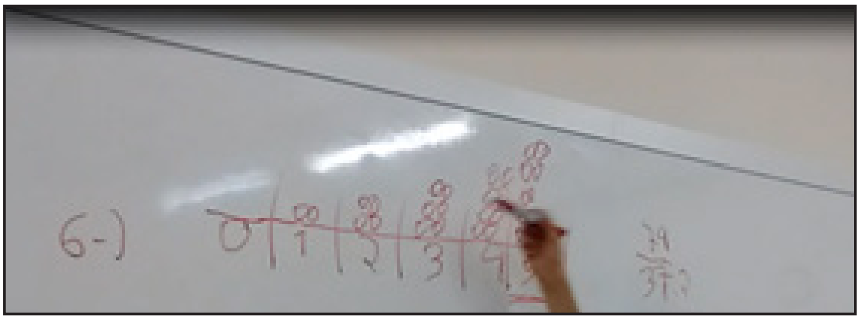
4. Experimente usar a fórmula de Marina para os números 1 e 2 da tabela.

5. Verifique se suas respostas dos itens 1 e 2 estão corretas, usando essa fórmula.

Fonte: Arquivo da pesquisa

> *Lucas: Nós percebemos que os números que estão na linha de baixo representam a posição, e, se fizermos a posição vezes 2, dá a quantidade de bolinhas que tem na linha de cima. Por exemplo, se quiséssemos saber quantas bolinhas terá a posição 37, é só fazer 37 x 2 = 74 bolinhas.*

Figura 7 – Lucas socializando a atividade com a classe

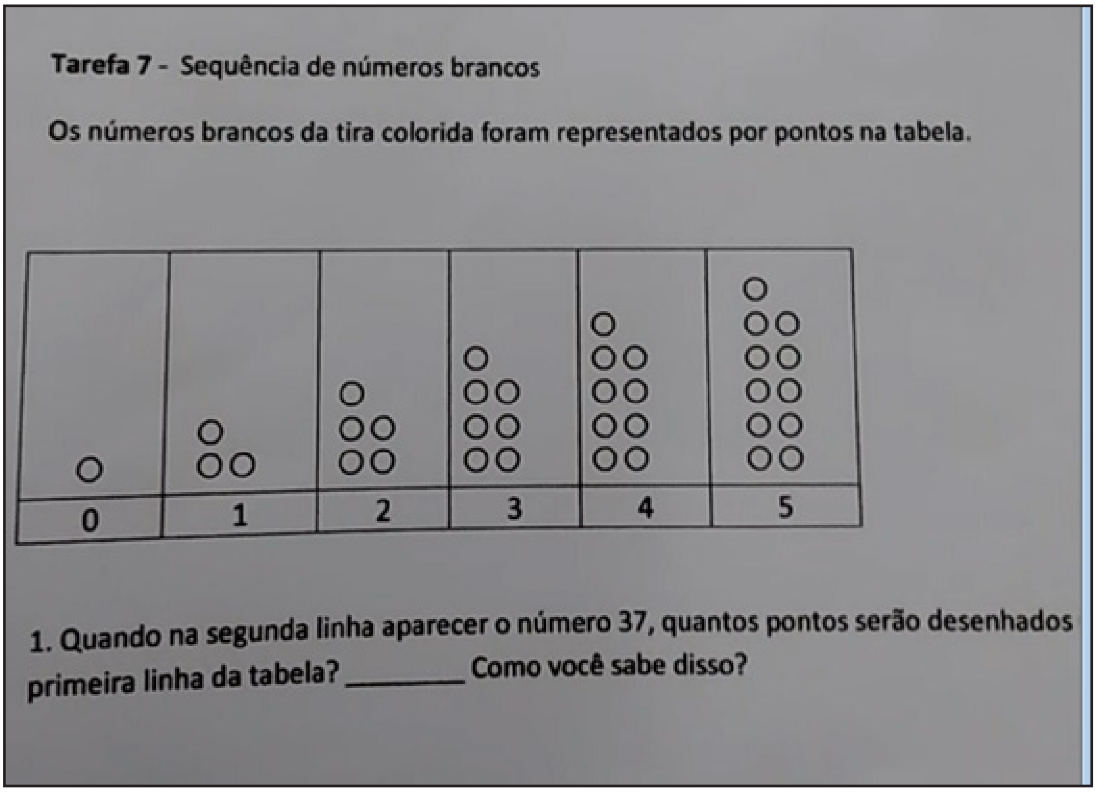


Fonte: Arquivo da pesquisa

> *Lucas: Como nós já tínhamos percebido que era a posição vezes 2; então, a fórmula que o problema dá é P = 2n; logo, P = resultado ou número de bolinhas e n = número da posição. O exercício pede também para testarmos, e, testando com várias posições, vimos que todos dão certo.*

Lívia e Lavínia também socializaram suas descobertas referentes a outro exercício.

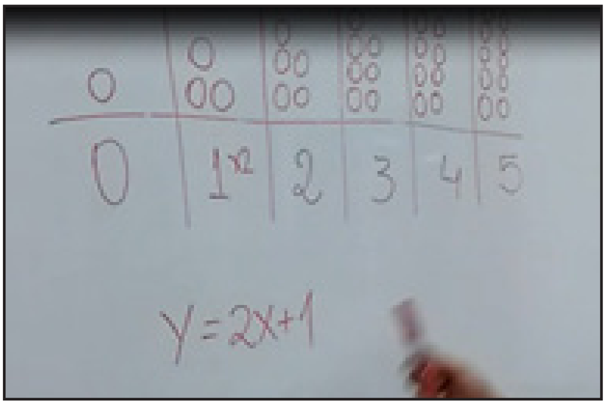
Figura 8 – Enunciado do exercício socializado por Lívia e Lavínia



Fonte: Arquivo da pesquisa

Livia e Lavínia: Primeiro percebemos qual era o padrão, e vimos que a segunda linha era a posição que cada conjunto de bolinhas ocupava. Daí, percebemos que, para ter 3 bolinhas na posição 1, foi feito (1 x 2) + 1; para ter 5 bolinhas na posição 2, dava pra fazer (2 x 2) + 1; para ter 7 bolinhas na posição 3, poderíamos pensar em (3 x 2) + 1. Daí, já tiramos que o número da posição vezes 2 mais 1 seria o padrão. Daí, chamamos de y o resultado (o número de bolinhas) e de x o número da posição, ficando y = 2x + 1.

Figura 9 – Lívia e Lavínia socializando com a classe

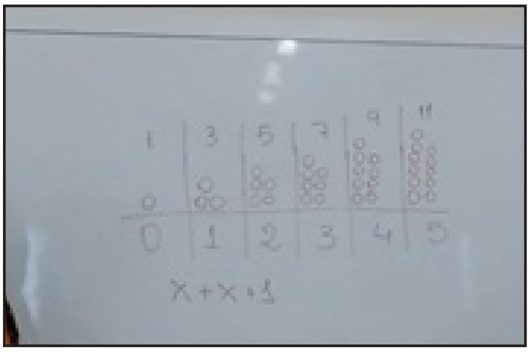


Fonte: Arquivo da pesquisa

Perguntei se todos chegaram à mesma conclusão. Maysa e Larissa disseram que pensaram em uma solução diferente. Convidei-as para que fossem à lousa mostrar para os colegas seu raciocínio; apesar de muito tímidas, elas aceitam o convite.

Maysa e Larissa: Nós pensamos assim: se olharmos para a posição número 0, tem uma bolinha, então 0 + 1; a posição 1 tem 3 bolinhas, então, é a posição 1 + 2 (que seria a próxima posição; aí, vimos que o número de bolinhas se dá através do número da posição mais o número da próxima posição. Então, para responder à pergunta de quantas bolinhas terá a posição 37, é só fazer 37 + 38 = 75 bolinhas.

Figura 10 – Maysa e Larissa socializando a atividade com a sala



Fonte: Arquivo da pesquisa

Por fim, Maysa ou Larissa afirmou: "*A expressão algébrica fica diferente da Lívia, chamando a posição de x e a posição sucessiva de x + 1 fica: x + x + 1*". Eu elogiei as meninas e disse que estava correto, mas propus que simplificassem essa expressão, considerando que elas sabem fazer essa ação. Elas olharam bem. Alguns alunos estavam com muita vontade de falar, mas eu não permiti. As meninas disseram que o x pode ser somado com o outro x, porque são semelhantes, com isso, a expressão ficaria 2x + 1. Ficaram muito surpresas com o resultado e disseram que não tinham percebido que, apesar de a ideia ser diferente, havia semelhança com a solução da dupla anterior.

As duas alunas, além de muito tímidas, possuem algumas particularidades. Larissa havia entrado na escola no ano em que fizemos a atividade e estava se adaptando. Já Maysa era minha aluna desde o 6.º ano e apresentava muita dificuldade em Matemática, mas estava evoluindo muito e se tornando muito mais segura, confiante e participativa. Fiquei muito feliz com a colocação delas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi a primeira vez que fiz um trabalho utilizando videogravação em um trabalho. Já havia usado, em outros momentos, a audiogravação, porém a videogravação possibilita, por um lado, analisar o pensamento dos alunos (GRANDO; NACARATO, 2015) e, por outro, estudar as aprendizagens docentes, com base no movimento de elaborar a tarefa para a sala de aula, desenvolvê-la e analisar o vídeo produzido.

Quando elaborei as tarefas e selecionei uma atividade para o 7.º ano e outra para o 8.º, pensava em uma atividade de nível mais fácil para o 7.º e outra um pouco mais de difícil para o

8.º ano. Quando fui para a sala de aula desenvolver as atividades com os alunos do 7.º ano, tudo transcorreu muito bem; porém, a primeira atividade que tentei fazer no 8.º ano foi um fracasso. Atribuo isso a mim mesma, pois, ao ver a videogravação, percebi que minhas intervenções, ou melhor, minhas falas, na intenção de ajudá-los, fizeram com que eles, que já estavam confusos, ficassem ainda mais perdidos.

Fiquei muito frustrada comigo mesma. Então, resolvi aplicar a mesma atividade que tinha feito no 7.º ano com os alunos do 8.º e analisar as dificuldades que teriam. Isso porque, como os conhecia bem, não acreditava que eles não dessem conta das atividades propostas.

Como relatei, nas primeiras atividades, mesmo sem o material manipulável, eles se saíram muito bem, entenderam a proposta sem dificuldades. A partir daí, fomos para os exercícios que haviam sido pensados para eles. As tarefas foram desafiadoras, pois eles, além de se sentirem motivados a resolver as questões, discutiam muito entre si. Houve a participação de todos os alunos. Nesse segundo momento, eu também estava mais preparada. Minhas intervenções, minhas perguntas, faziam com que suas discussões convergissem a um objetivo que agora eles conheciam: a generalização algébrica. Quando disse a eles que iria dar uma dica e fiz a tabela na lousa, chamando a posição ocupada pela figura de x, tudo ficou muito mais claro.

Segundo Tardif (2002, p. 36), “a relação dos docentes com os saberes não se reduz a uma função de transmissão dos conhecimentos já constituídos”. A prática docente exige muito mais que isso, exige uma articulação entre os saberes provenientes da formação profissional e os experienciais. Como já indicado, essa foi a minha primeira experiência com uma aula videogravada e com o tema “sequências e padrões”. No final, gostei do resultado; os alunos também ficaram satisfeitos, conseguiram entender a proposta e chegar às soluções. Notei a motivação deles quando terminaram a primeira atividade proposta e me cobraram a continuação daquela que não havia dado certo.

Essa atividade fez com que eu olhasse para as aprendizagens dos alunos e também para minha própria. Voltei-me para meu próprio desenvolvimento profissional e vi que estou sempre aprendendo com meus próprios alunos, com a visualização de minha aula videogravada, com minha própria experiência.

REFERÊNCIAS

CHARLOT, Bernardo. *Relações com o Saber, Formação dos Professores e Globalização*: Questões para educação hoje. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

FREITAS, Maria Teresa Meneses; FIORENTINI, Dario. As possibilidades formativas e investigativas da narrativa em educação matemática. *Revista Horizontes*. Bragança Paulista, SP, v. 25, n. 1, p. 63-71, jan/jun 2007.

GRANDO, Regina Célia; NACARATO, Adair Mendes. Captando o movimento do pensamento probabilístico de alunos do ensino fundamental – a videogração em sala de aula. In: POWELL, Arthur. *Métodos de pesquisa em Educação Matemática*: usando escrita, vídeo e internet. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015, p. 95-125.

TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. *Padrões em Matemática*: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico. 1. ed. Lisboa: Educação Hoje. Texto Editores, 2011.

“PRESTE ATENÇÃO NESTA PERGUNTA, ELA É UMA PEGADINHA!”

Raquel Fernandes Gonçalves Machado

Conversando sobre nossa proposta

Nesta narrativa, apresento momentos experienciados com estudantes do Ensino Fundamental em turmas da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Propus a eles a realização de tarefas que os desafiariam tanto a perceber regularidades quanto a identificar padrões nas diferentes sequências propostas.

Atuo como professora de Matemática em um colégio de aplicação, desenvolvendo atividades com estudantes do Ensino Fundamental regular. Mas algumas experiências no cotidiano escolar oportunizaram aproximações importantes com alunos que frequentavam a Educação de Jovens e Adultos. Exerci, por um período, a coordenação deste segmento de ensino. Essa experiência favoreceu meu envolvimento com professores e estudantes, bem como fez com que conhecesse diferentes contextos que envolviam o cotidiano desses alunos. Percebi algumas de suas facilidades e/ou dificuldades que interferem nos processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos. Em especial, a atuação como coordenadora possibilitou aproximar-me da professora responsável pelo conteúdo de Matemática trabalhado com esses estudantes.

Nessa aproximação, houve momentos de estudos relativos aos conteúdos propostos, reflexões sobre a seleção e a organização de tais conteúdos, e análise e (re)elaboração de alguns objetivos e atividades. A vivência desses momentos, aliada à observação de ações desses estudantes se relacionando com tópicos matemáticos, mobilizou inquietações.

Essas indagações resultaram na elaboração de meu projeto de pesquisa para doutoramento, aprovado pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade São Francisco (USF), e nos estudos para a composição de minha tese. As leituras propostas pelos professores das disciplinas, os debates e os questionamentos advindos destas delinearam meu objeto. Este consiste em investigar e compreender tanto as relações entre as diferentes culturas percebidas nesse contexto escolar — a cultura da Educação de Jovens e Adultos, a da sala de aula e as das aulas do conteúdo específico — quanto as relações espaço-temporais produzidas no processo de ensino e aprendizagens do conteúdo de Matemática.

Nesse período de estudos das disciplinas, iniciei minha participação nas reuniões semanais do Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat). Nessas reuniões, os integrantes do grupo realizam leituras de pesquisas, escrevem textos diversos e refletem sobre seu lugar na Matemática escolar, especialmente nos anos iniciais. No momento em que passei a fazer parte do grupo, o foco estava voltado às possibilidades de construção do raciocínio algébrico.

Buscávamos encontrar, no contexto de generalização de propriedades dos números e das operações, potencialidades para o desenvolvimento desse raciocínio. Para isso, as leituras se intercalavam com as pesquisas, as análises e as adequações de tarefas investigativas que poderiam favorecer a percepção e a generalização de padrões em sequências. A análise das possibilidades de algumas tarefas já inspirava, em cada componente do grupo de estudos, questionamentos sobre o envolvimento dos alunos diante desses desafios.

As leituras, as reflexões, a análise e a seleção das tarefas consistiam em um movimento muito interessante e instigante. Isso me incentivou a investigar a ação dos estudantes de turmas da Educação de Jovens e Adultos, desafiando-os com a proposição de algumas dessas tarefas que envolviam o pensamento algébrico. Contudo, surgiam também inseguranças relacionadas às expectativas que alguns jovens e adultos carregam consigo ao chegar e/ou retornar aos bancos das escolas. Na diversidade de suas trajetórias, em sua maioria, delineadas pela exclusão sociocultural e pela negação de direitos, alguns deles com escolarização básica incompleta, outros nem tiveram oportunidade de iniciá-la. Portanto, têm diferentes conquistas, habilidades, dificuldades bem como conhecimentos sobre o mundo, sendo estes últimos aliados a suas crenças.

Apesar dessas inseguranças, arrisquei-me nessa proposta. Identifico em Fonseca (2002) sustentação para meu desafio. A autora se reporta à importância de fundamentarmos a proposta de trabalho com esses alunos segundo um processo educacional orientado por "ações educativas", atentando para a identidade do grupo de estudantes com o qual se trabalha, não se limitando a os perceber segundo a caracterização enquanto modalidade de ensino.

Para a efetivação dessa proposta, surgiam outros desafios. À época, eu estava afastada das salas de aula para os estudos de doutoramento, não tinha turmas de estudantes sob minha responsabilidade, não tinha como fazer a proposição das tarefas selecionadas. Era necessário escolher uma instituição de ensino e estabelecer contato com um(a) profissional responsável pelo conteúdo de Matemática, em busca de parceria para o desenvolvimento da proposta.

Encontrei a professora Anaísa[1]. Ao apresentar-lhe a proposta, ela demonstrou interesse significativo, sugerindo o trabalho com uma turma de 8.º e outra de 9.º ano, respectivamente, 22 e 17 estudantes. Atenta ao quanto essa proposta poderia se constituir em um importante desafio a todos os envolvidos, recorro aos dizeres de Freire (2011, p. 84) que se referem à possibilidade ainda que "instintiva dos estudantes contra qualquer tentativa de uma educação estimulante do pensar

[1] Nome fictício da professora de Matemática das turmas selecionadas para a experiência. Os nomes dos alunos também são fictícios.

autêntico, que não se deixa emaranhar pelas visões parciais da realidade, buscando sempre os nexos que prendem um ponto a outro, ou um problema a outro". A investigação que pretendia realizar implicava em ações que se divergiam da figura tradicional do professor, caracterizada por aquele que conduz, dizendo o que e como fazer.

Essa proposta necessitaria de um envolvimento diferente dos estudantes. A participação destes deveria estar pautada em tentativas, experimentações e elaboração de suas próprias conclusões. O objetivo era que levantassem hipóteses, conjecturas, estabelecessem relações e discorressem sobre elas. Estava inserindo-os em uma cultura de aula de Matemática nem sempre vivenciada por eles. Ainda assim, considerei importante tentar.

Respaldei-me na disponibilidade de Anaísa e em minha necessidade de dialogar sobre o grupo, já que, nesse momento, teria que estabelecer vínculos para conseguir propor as tarefas, e a professora Anaísa seria o elo nessa relação. Ela sugeriu que eu realizasse observações de sua ação em sala com as turmas selecionadas, pois, assim, poderia perceber interações dos alunos entre si, deles com o conteúdo e do grupo com a professora. Outro ponto a destacar seria minha presença, que poderia se constituir menos perturbadora para eles no momento da proposição da atividade, o que me levou a elaborar um cronograma, contando com a colaboração de Anaísa. Nele, identifiquei horários para as observações e data para a proposição das tarefas.

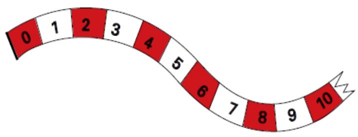
Entendo o quanto a parceria com o professor regente em sala de aula favorece e pode auxiliar a realização das ações elaboradas pelo pesquisador. Meu envolvimento com Anaísa mostrava a superação do desafio de obter a harmonia entre docente e investigadora. Ainda assim, não podia deixar de reconhecer tantos outros desafios! Havia muitas expectativas referentes à mediação de uma atividade com essas turmas. Estava atenta à diversidade de significados que a proposta poderia ter para cada um daqueles que nela se envolveriam ─ estudantes e profissionais. Estava diante de muitas hipóteses.

Estruturei minha ação escolhendo inicialmente uma das tarefas elaboradas pelo Grucomat, que propunha a construção de um fio[2] (tarefa 1). A tarefa 2 (descrita no Quadro 1) foi selecionada e sugerida em reuniões do Grucomat para que pudéssemos investigar como seriam a compreensão, o envolvimento e o desenvolvimento das ações de estudantes em diferentes níveis de ensino e complexidade.

[2] Neste texto darei ênfase apenas a uma das tarefas, a tarefa 2. Para conhecer a tarefa 1 do fio de contas, sugiro a leitura da narrativa de Carla Cristiane Silva Santos neste *e-book*.

Quadro 1 – Tarefa 2

Observe a tira de papel que inicia no número zero. Ela alterna números escritos em espaços nas cores vermelha e branca.



1. *Observe que a ponta da direita é diferente da ponta da esquerda. O que você acha que isso indica?*
2. *Agora, observando as cores dos números, responda:*

a) O que os números que estão nos espaços brancos da tira de papel têm em comum?

b) Pense em um número bem grande que não está representado na tira.

Escreva o número que você pensou. ________________

O espaço que esse número ocupa na tira é um espaço branco? ________________

Como você sabe disso?

c) O que os números que estão nos espaços vermelhos têm em comum?

Fonte: Elaborado pelo Grucomat

AÇÕES ENVOLVENDO OS ESTUDANTES E A PROFESSORA ANAÍSA

Em um dos encontros com Anaísa, ela relatou-me sobre dois alunos do curso de licenciatura em Matemática que iniciariam as atividades de estágio obrigatório, os quais também estariam em sala e poderiam contribuir com o desenvolvimento das ações com os alunos. A professora parceira propôs antecipar em um dia o início das tarefas com as turmas, ao considerar a possibilidade de o grupo não as concluir em uma noite. Assim, os alunos teriam a possibilidade de novas investigações nos horários de aula de Matemática, na noite seguinte. A sugestão foi aceita imediatamente. Seriam, portanto, quatro módulos de 45 minutos cada um! Uma possibilidade para que o tempo não fosse um obstáculo significativo para mim e para eles.

Na data agendada para o desenvolvimento da proposta, encontrei Anaísa e os estagiários, conversamos enquanto nos organizávamos para as ações da noite. Mesmo tendo realizado as observações em sala de aula, conhecendo um pouco mais sobre o grupo e estando envolvida com os últimos detalhes para a proposição das tarefas, questionava-me sobre a percepção dos estudantes em relação à presença de todos nós.

Provavelmente nos constituiríamos um grupo significativo de “intrusos” chegando ao espaço da sala de aula que era deles. O sinal soou, indicando a hora de irmos para a classe, iniciei a tarefa com a turma do 8.º ano e depois a realizei com o 9.º ano. Nos dois encontros, enquanto todos iam chegando, Anaísa apresentou os estagiários, e, assim que a maioria da turma chegou à sala, efetivei minha ação com eles.

Falei sobre a proposta e sobre meu desejo de um envolvimento significativo do grupo para solucionar as tarefas selecionadas. Expressei minha intenção de realizar vídeo e audiogravações e oportunizei as manifestações contrárias, que poderiam ser registradas, o que não ocorreu. Continuei minha conversa com o grupo.

Radford (2013, p. 5, tradução minha) aponta que, "para generalizar a sequência, os alunos devem recorrer a uma série de determinações sensíveis e notar similitudes e diferenças. A princípio, as determinações possíveis constituem um conjunto extenso". O pesquisador destaca algumas possibilidades, como a quantidade de termos, o espaço entre as figuras e mesmo a cor das mesmas, considerando assim a necessidade por facilitar a identificação de algumas semelhanças nas sequências que lhes seriam propostas. Nesse sentido, ainda segundo o autor (RADFORD, 2013, p. 5, tradução minha, grifo do autor), "a escolha de semelhanças e diferenças se fará, inicialmente, de acordo com a compreensão que os estudantes possuem do *objeto* da atividade de generalização"[3]. Fiz, assim, meu questionamento inicial à sala quanto à compreensão do significado da palavra *padrão*.

Alguns se arriscaram a falar, outros apenas observaram. Aqueles que se pronunciaram fizeram associações com padrão de medida, modelo de carro padrão (sem acessórios, mais barato), padrão de energia e de qualidade dos alimentos. Apesar de minha expectativa, nenhum deles fez referência a operário-padrão ou padrão de beleza. Conversamos sobre as associações que sugeriram, relacionando-as às ações diariamente realizadas por eles ─ acordar, alimentar-se, ir ao trabalho, seguir uma rotina. Vários deles se manifestaram, e pedi que procurássemos identificar o significado para a palavra. Eles concluíram que o termo significava o que se repetia, o que apresentava algumas regularidades. Indiquei que buscaríamos, nas atividades, as regularidades.

Pedi que se organizassem em duplas, informando que receberiam as folhas com as tarefas. Optei por entregar tais folhas separadamente, assim poderia observar o modo como estavam se organizando para desenvolver a proposta e também os diálogos realizados para estruturar a resolução, respeitando o tempo de cada dupla.

Alguns alunos solicitaram a formação de trios. Para o adulto, escolher um ou outro colega para realizar uma tarefa nem sempre é tranquilo; ainda que não haja a necessidade de desenvolver relações afetivas, de ter companheirismo ou não, para frequentar o curso, podem ocorrer dificuldades. Entendi que não haveria nenhum impedimento para a reorganização indicada por eles; ademais, se os deixasse livres para fazer a formação pedida, estaria, minimamente, favorecendo, segundo Freire (2013), uma prática educativo-crítica, que implica em oportunizar espaço aos estudantes

---

[3] La escogencia de similitudes y diferencias se hará, en principio, según la comprensión que se hacen los estudiantes del objeto de la actividad de generalización.

para se posicionarem diante de uma indicação do professor e valorizar a iniciativa deles. Dessa forma, houve concordância e alguns trios se formaram.

Pretendia entregar algumas folhas com a imagem colorida e outras com a fita em preto e branco para cada dupla, assim como para os novos trios; porém, houve contestação! Segundo eles, com a imagem colorida, poderiam perceber melhor as diferenças e responder corretamente, ainda que, em meu entendimento, a imagem colorida fosse um "pequeno detalhe". Nickson (1992) alerta para uma cultura da aula de Matemática que depende de uma extensão significativa de inferentes, aos quais se reporta como "componentes invisíveis" que podem se constituir "entraves". Entendo que, em um contexto de sala de aula com jovens e adultos, não seriam um entrave algumas folhas com a imagem colorida e outras com o desenho sem cor; entretanto, a contestação veemente do grupo foi um indício contrário. Essa situação apontou-me que o que considerava ser um "pequeno detalhe" era significativo aos estudantes. Seria pelo direito ao mesmo material? A imagem colorida facilitaria a compreensão da tarefa? Desafio vencido: foram providenciadas e entregues folhas com impressão em cores a todos eles.

Ao receberem as folhas, identifiquei o envolvimento da maioria deles com a resolução das tarefas; todavia, alguns demonstravam certa restrição com a proposta. Quando me aproximei, não se manifestavam muito. Nos registros de áudio, identifiquei uma fala importante, de Júlia: "*Isso parece aquelas coisas... exercícios de psicólogo... isso não é Matemática*". Porém, não percebi essa fala no momento da aula, ao contrário da enunciada por outra aluna, Lia, que me disse, como em um desabafo: "*Isso não é Matemática, isso é brincadeira. Na próxima aula não faremos isso de novo não, né?*".

O episódio acima revela uma das práticas mais significativas para mim: o registro das ações em diferentes contextos, em especial da vivência na sala de aula. Esse não é um procedimento com o qual nós, professores, estamos familiarizados, e meu encantamento se justificou e se justifica com a potencialidade dos registros.

Realizar vídeo e/ou audiogravações oportunizou ver e rever diferentes momentos dos estudantes envolvidos com as tarefas, identificar algumas das falas dos alunos, como a de Júlia, que podem se perder na dinâmica da aula, quando as demandas são muitas. Pude perceber nos registros uma riqueza de informações: alguns dos conflitos dos estudantes, vinculados a suas expectativas, e a realidade experienciada com as proposições do professor - diálogos evidenciando algumas hipóteses que não foram socializadas durante a resolução da tarefa.

Considero a produção de registros uma contribuição relevante para a compreensão da própria prática. Observei-me no contexto de sala de aula e percebi encaminhamentos e orientações, alguns deles favoreciam o entendimento da tarefa pelos estudantes, outros tinham que ser revistos. Ademais, identifiquei, em minhas falas e nas dos estudantes, referências a valores, crenças e sentidos e significados para uma aula de Matemática. Isso me fez concluir que precisava conversar com Lia.

Inicialmente, indaguei sobre ações que Lia considerava que poderiam solucionar os desafios propostos na tarefa. A aluna começou a citar algumas operações, comparações e relações de divisibilidade, mencionou também a tabuada. Após nossa conversa, ela percebeu a Matemática presente na tarefa, aquela com a qual estava mais familiarizada, notou que apenas não estava tão evidente como em alguns dos exercícios feitos em sala. No enunciado da tarefa, não encontrou algumas das frases que lhe eram familiares ─ como "efetue as operações a seguir" ou "escreva todos os divisores dos numerais apresentados nos itens abaixo" ─ e entendeu que a atividade não estava relacionada aos conteúdos estudados em aulas de Matemática.

Segundo Hiebert et al. (1997), quando os estudantes conseguem aplicar algum conhecimento já elaborado anteriormente, é possível inferir que estão mobilizando e ressignificando conceitos, estão trabalhando, de modo simultâneo, em duas frentes: reconhecem o que o conhecimento significa e buscam descobrir como pode ser usado efetivamente para compreender algo mais. Essa colocação dos autores me auxiliou a entender a movimentação de Lia na carteira e sua inciativa de reler a tarefa na folha com um envolvimento diferente do anterior: ela descobrira que, para resolver as tarefas propostas, poderia recorrer àquela Matemática que conhecia.

Em meu primeiro encontro com os estudantes, estive atenta às diferentes interferências e esclareci ao máximo minhas ações. Por esse motivo, iniciei nosso segundo momento entendendo que todos estavam cientes da proposta e, desse modo, apresentei a próxima tarefa. Fui surpreendida, entretanto, por um importante obstáculo no cotidiano do trabalho com jovens e adultos: a frequência irregular. Nesse encontro, eu tinha novas presenças!

Entreguei a segunda tarefa a todos os presentes até porque, por conta de meu desconhecimento mais sistemático do grupo, não identifiquei os que estavam participando pela primeira vez da tarefa. Apenas quando me movimentei pelos grupos fui percebendo meu equívoco: somente um deles não estava na aula da primeira tarefa. Ainda assim, optei por deixá-los com a segunda tarefa e investigar com maior proximidade a ação desses grupos, pretendendo constatar o quanto seria significativa ou não a realização da tarefa com as contas coloridas.

Apresento, a seguir, recortes do diálogo com uma dupla, Mário (M) e Laura (L)[4]. Percebi, no movimento inicial dessa dupla, uma ação individualizada: L estava escrevendo, completando as questões, e M olhando a folha. Ao aproximar-me, percebi que ela estava rindo. Eles notaram que eu estava filmando; porém, ainda que não soubessem o motivo, não contestaram. Observei o que estavam registrando, e, antes que eu pudesse dizer algo, ele comentou:

> *M: Vamos tirar nossa primeira dúvida.*
> *Raquel (R): Isso.*
> *M: Isso aqui tem várias interpretações, qual é a mais correta?*
> *R: Não sei. Qual a interpretação que vocês estão dando?*
> [L continua rindo.]

[4] Nomes fictícios.

M: Professora, primeiro... Como você chama?
[Digo meu nome, e M continua]
M: Oh, Raquel, tudo bem com você?

Em um curto intervalo de tempo, parei e me dei conta de que não havia conversado com os estudantes, essa dupla esteve ausente na noite anterior. Desculpei-me, esclareci o motivo de minha presença e apresentei-me à dupla. Apesar do ocorrido, inferi no dizer de M uma busca por se situar melhor no contexto, conseguir um tempo para compreender e se inteirar dos acontecimentos. Talvez procurasse entender o que aquela pessoa, que ele não conhecia, fazia ao se aproximar com uma filmadora e fazer perguntas, sem responder às dele.

M não fez outros questionamentos, voltou os olhos para a folha, demonstrando seu intento de responder às questões. Começou a (re)ler o enunciado da tarefa, que lhe pedia para observar a tira com números escritos em espaços coloridos alternadamente com as cores vermelha e branca. L não participou nem se manifestou, continuava escrevendo, envolvida com a resolução do desafio da fita colorida. M comentou: "*Lembra uma bandeirinha?! Sei lá... indica que terminou no 10... não tem continuidade*".

Na tentativa de integrar L em nossa conversa, perguntei se ela concordava com M quando ele disse que a fita não tinha continuidade. Ela, parecendo não ouvir minha indagação, falou baixinho e um pouco enrolado: "*Do mesmo jeito*". Retornei à conversa com M, tentando perceber mais algumas de suas considerações. L estava atenta ao que ele fazia. Nesse instante, percebi o quanto são importantes os momentos em que ouvimos os argumentos dos estudantes e enxergamos o que estão deduzindo e o que pode ou não coadunar com nossa expectativa.

Em minha hipótese, eles ficariam atentos ao "picotado" da fita. Ao questioná-los sobre o que percebiam na imagem, obtive a resposta de M: "*Uma bandeirinha pelo formato dela... pela voltinha...*". Espantei-me! Ele não estava atento ao "picotado" em uma das pontas da fita, não comparou ou percebeu diferença entre as duas pontas, esse não era seu foco. O contorno da fita é que remetia à imagem de uma bandeirinha. Considerei que, se insistisse, tentando fazê-lo chegar à resposta que eu desejava ouvir, poderia causar ansiedade ou mobilizar alguma irritação, sem garantir uma mudança em sua percepção.

Convidei-os a continuar a leitura das perguntas seguintes para verificar se M manteria a afirmação ou mudaria algo. Ele retomou a leitura em voz alta, na questão que se referia aos números que ocupam os espaços em branco, e não hesitou na resposta: "*São ímpares!*". L concordou e, enquanto ele falava, escreveu: "ímpares". M continuou a ler vagarosamente. Captei o impasse: escolher um número "bem grande"!

No registro videogravado, identifiquei um trecho do diálogo entre eles no qual M faz referência à escolha feita por L, ao escrever o número. Isso inspirou a composição do título desta narrativa. L arriscou e escreveu 99000. Mesmo se vendo confusa com a quantidade de zeros, não se intimidou. Enquanto isso, M continuava a leitura. Ela questionou-o sobre a quantidade de zeros que precisava escrever, e ele respondeu: “Dois... falta um...”. Ela acabou registrando 99000000.

É interessante constatar que, para L, estava claro que esse número não ocupava um espaço branco e sim um espaço escuro. Ela observou a sequência de números pares escritos na fita e começou a acrescentar alguns que não estavam grafados. Entretanto, seu colega de dupla contestou! M reforçou seu desejo de manter o número 11, demonstrou não estar tranquilo com a escolha de L e comentou de forma enfática: “*Presta atenção nesta pergunta que ela é uma pegadinha!*”. Essa fala pareceu começar a desestabilizá-la. Na tentativa de entender a consideração de M, fiz mais um questionamento. L ficou incomodada e, rindo, afirmou: “*A professora parece um delegado!*”.

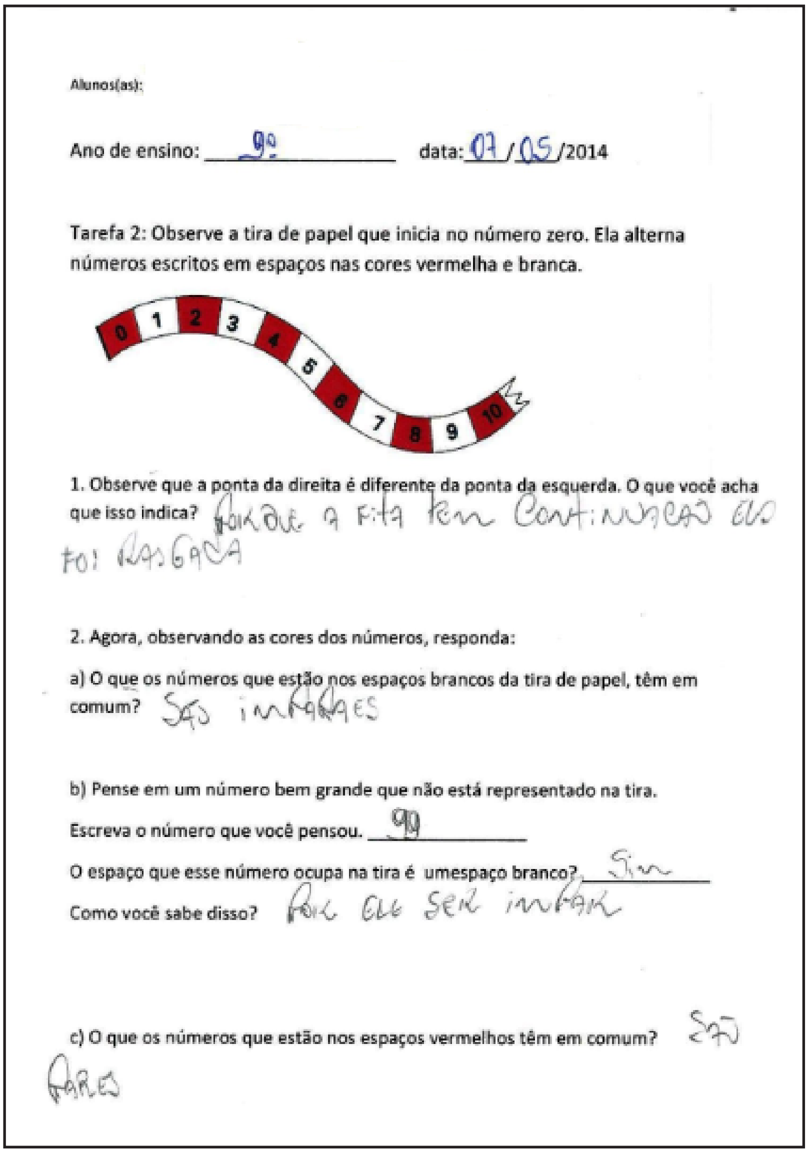
Apesar de M assinalar que a fita poderia ter sido rasgada, ele ainda parecia não concordar e disse que aquele número grande não estava na fita. L defendeu que estava sim, na continuação dela, no pedaço rasgado que não aparecia. M parecia estar focado no que via e não admitia, ainda, a possibilidade de outros números, pelo menos aqueles muito grandes, como ela desejava.

É notável o quanto, inicialmente, para L, era certo o lugar do número na fita; se seria uma noção intuitiva ou não, não consegui investigar. Mas, ao parar para pensar nos questionamentos do colega, intercalados a minhas perguntas, L pareceu se desestabilizar. Produziu diálogos entrecortados por momentos de dúvida, porém manteve o humor e tentou justificar de forma significativa sua resposta.

Houve um envolvimento muito expressivo! Mesmo sem a experiência da aula anterior, M buscou respostas, atento ao que estava escrito, mas muito desconfiado! Provavelmente vivências anteriores podem ter fundamentado sua afirmação à colega de que havia “uma pegadinha” na resolução da atividade. L estava (pre)ocupada em registrar de forma completa, em escrever corretamente as respostas, e afirmou ter sido assim que aprendeu com outra professora. Os registros feitos por L seriam copiados posterirormente por M.

Diante de tantas perguntas, L se sentiu pressionada. Afastei-me da dupla, visando dar um tempo para se organizarem sem minha presença, bem como para observar o trabalho de outros grupos de alunos. Ao retornar à dupla M e L, percebi que ele tinha conseguido convencê-la: ela alterou o número, apagou zeros. Diante do novo número, 99, L afirmava com certeza: “*Estará no espaço branco!*”. Na Figura 1, apresento o registro entregue pela dupla.

Figura 1 – Registro da dupla M e L



Alunos(as):

Ano de ensino: 9º data: 07/05/2014

Tarefa 2: Observe a tira de papel que inicia no número zero. Ela alterna números escritos em espaços nas cores vermelha e branca.

1. Observe que a ponta da direita é diferente da ponta da esquerda. O que você acha que isso indica? PORQUE A FITA TEM CONTINUAÇAO ELA FOI RASGADA

2. Agora, observando as cores dos números, responda:

a) O que os números que estão nos espaços brancos da tira de papel, têm em comum? SÃO IMPARES

b) Pense em um número bem grande que não está representado na tira.

Escreva o número que você pensou. 99

O espaço que esse número ocupa na tira é umespaço branco? Sim

Como você sabe disso? POR ELE SER IMPAR

c) O que os números que estão nos espaços vermelhos têm em comum? SÃO PARES

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Anaísa avisou-me que o tempo destinado à resolução da tarefa já estava adiantado e que haveria a necessidade de interromper a ação dos grupos para garantir a socialização das conclusões elaboradas por eles até aquele momento. Propus, então, aos alunos que interrompessem os diálogos e atentassem à socialização das soluções encontradas para aquela tarefa.

Hiebert et al. (1975) defendem a importância de processos que favorecem o estabelecimento de conexões matemáticas, sendo um deles pensar conscientemente as próprias experiências e as do outro, o que envolve a necessidade da comunicação ─ o falar, o ouvir, o escrever, o observar, ações importantes no processo de socialização. Justifica-se, assim, minha solicitação ao grupo para iniciarmos as socializações das resoluções. Ainda que estivessem um pouco resistentes em desfazer os grupos, insisti.

Enquanto as socializações aconteciam, registrei no quadro os números "pensados" pelos grupos, destacando o número inicialmente dito por Laura. Ela interrompeu minha fala e contou aos colegas que tinha apagado os zeros. Eles se assustaram com a representação do número e começaram a rir nervosamente. Entretanto, alguns alunos animaram-se e fizeram correções em alguns valores, contando que haviam indicado, inicialmente, 300 e não 30, como registraram. Uma dupla arriscou-se, pedindo que registrasse no quadro o numeral 1 000 000 000.

O momento da socialização dos alunos sobre suas hipóteses e suas resoluções é muito relevante e evidencia toda uma formulação e uma compreensão dele sobre conceitos matemáticos. Nessa etapa, eles conversaram sobre o lugar de cada um desses numerais, os grupos posicionaram-se, diferenciando números pares de ímpares e identificando o lugar de cada um deles na fita. Ao justificarem a classificação de um número como par, alguns o fizeram pela presença de zero na ordem das unidades, outros acrescentaram que podemos levar em conta a divisibilidade por dois e ainda alegaram que o numeral ser múltiplo de dois garantiria sua classificação como número par.

REFLETINDO SOBRE A PROPOSTA

Ao iniciar esta narrativa, reportando-me, em especial, ao relato da parte específica do desenvolvimento das tarefas, evidenciei meu propósito de observar a ação dos estudantes no envolvimento com a tarefa que apresenta a tira colorida. Destaquei, particularmente, uma das duplas: os alunos M e L, de uma turma de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos. Enfoquei o relato em suas observações, em suas afirmações e em suas tentativas de resolução da tarefa. Pude inferir, pelos registros desses alunos, que, para eles, não se constituiu um obstáculo significativo a tarefa desenvolvida ter sido o primeiro contato com uma atividade investigativa. Eles conseguiram estabelecer relações e dialogar, respeitando as considerações um do outro.

Também foi possível evidenciar o quanto foi importante para toda a turma a realização de tarefas investigativas. Isso se comprovou com a diversidade de suas respostas e com as argumentações sobre as escolhas feitas pelos colegas M e L para solucionar o desafio e identificar o padrão.

Ressalto o considerável envolvimento da maioria dos estudantes das duas turmas, 8.º e 9.º ano, na tentativa da resolução. Eles venceram desafios e vivenciaram sua primeira experiência de exploração de padrões, aliada à presença de tantas pessoas estranhas ao cotidiano deles.

Os registros da tarefa da fita com duas cores mostraram que a atividade se constituiu em um desafio importante e que a maioria dos alunos conseguiu perceber a regularidade. Alguns desses registros indicam também como eles se arriscaram, conseguindo elaborar interessantes observações, estabelecer associações com outros conteúdos, desafiando-se com questões ao se depararem com o significado e a classificação do "Zero" quando iniciaram a escrita de números maiores. É necessário compreender o quanto foram cuidadosos no registro de um número maior. Os exemplos apresentados restringiram-se a número com apenas duas ordens, alguns alunos arriscaram a escrita de numerais contendo centenas; contudo, percebi que estavam cientes de que essas respostas não correspondiam à indicação. Nos registros, encontramos dois números "bem grandes" (99 000 000 e 1000 000 000).

Não posso me esquivar de constatar o valor da realização da tarefa para os envolvidos. A experiência foi altamente significativa tanto para mim quanto para as classes. Isso é visível nas resoluções, nas escritas das conclusões dos alunos e no dizer, entre risos, da aluna Meire para suas colegas de grupo: "*Não estávamos animados a começar, agora ninguém quer parar, e ela não consegue falar*".

REFERÊNCIAS

FONSECA, Maria Conceição. *Educação Matemática de jovens e adultos*. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da Autonomia*: saberes necessários à prática educativa. 45. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2013.
________. *Pedagogia do oprimido*. 50. ed. rev. e atual. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011.

HIEBERT, James. et al. *Making Sense*: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997.

NICKSON, Marilyn. The culture of the mathematics classroom: unknown quantity? In: GROUWS, Douglas A. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992. p. 101-114.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, Luis. et al. (Org.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro.* Granada: Comares, 2013. p. 3-12.

TAREFAS SOBRE SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO: IDENTIFICANDO REGULARIDADES E FAZENDO GENERALIZAÇÕES

Rosangela Eliana Bertoldo Frare

INTRODUÇÃO

O presente texto narra uma experiência com tarefas sobre sequências desenvolvidas em duas turmas — A e B — do 2.º ano do Ensino Médio. Ela foi realizada em fevereiro de 2015, em uma escola pública do interior do estado de São Paulo, na qual sou professora de Matemática. Tais tarefas foram retiradas do banco de questões da Obmep[1] (ABREU et al., 2014) e adaptadas com a intenção de verificar se os alunos perceberiam relações e regularidades e fariam generalizações usando a álgebra. Friso que esta tem sido o foco de estudo do Grucomat (Grupo Colaborativo em Matemática), do qual participo.

Optei por desenvolver essas duas tarefas, porque exigiam um nível maior de exploração, compatível aos possíveis conhecimentos dos alunos do Ensino Médio, em comparação às outras discutidas até então no grupo. Contudo, tais tarefas, apesar de terem sido planejadas para essa etapa do ensino, podem ser adaptadas e propostas a outros anos da escolaridade básica. Considero, assim como Hiebert et al. (1997), a escolha das tarefas um dos papeis do professor. Elas devem se constituir desafios para os alunos, permitindo a exploração do pensamento matemático e das estratégias de resolução.

Vale ressaltar que o ambiente de aprendizagem estabelecido era novo para os alunos selecionados para participarem dessa experiência. Eles não estavam acostumados com trabalhos em grupo nas aulas de Matemática e muito menos com propostas investigativas, não haviam participado de nenhuma atividade escolar audiogravada como a aqui exposta. Ademais, não fazia parte de suas experiências escolares socializar ideias e procedimentos de resolução com os demais alunos da sala.

No entanto, estando no 2.º ano do Ensino Médio, os alunos já haviam estudado sequências numéricas — Progressões Aritmética e Geométrica — no ano anterior, em cumprimento ao currículo oficial do estado de São Paulo. Em vista disso, minha expectativa era a de que não tivessem tantas

[1] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

dificuldades com o desenvolvimento das tarefas propostas e conseguissem fazer generalizações.

A primeira tarefa (Quadro 1), mais simples, foi utilizada como disparador para um trabalho de investigação de regularidades mais complexo, proporcionado pela segunda tarefa (Quadro 2).

Quadro 1 – Tarefa 1

Uma minhoca anda sempre sobre uma linha reta. Todo dia ela avança 5m e recua 3m.

a) Ao final de 15 dias, a minhoca estará a que distância do ponto de partida?

b) Existe alguma regularidade na sequência formada pelas distâncias atingidas pela minhoca em relação do ponto de partida ao final de cada dia?

c) Vocês conseguiriam descobrir a que distância ela estará do ponto de partida ao final de qualquer quantidade de dias? Como?

d) Ao final de 27 dias, quantos metros terá percorrido, no total, essa minhoca?

e) Existe alguma regularidade na sequência formada pela quantidade de metros percorridos pela minhoca, no total, ao final de cada dia?

f) Vocês conseguiriam descobrir quantos metros ela terá percorrido ao final de qualquer quantidade de dias? Como?

Fonte: Adaptado de Abreu et al. (2014, p. 51)

Quadro 2 – Tarefa 2

Utilizando cubos, são construídos muros conforme representa a sequência de figuras abaixo:

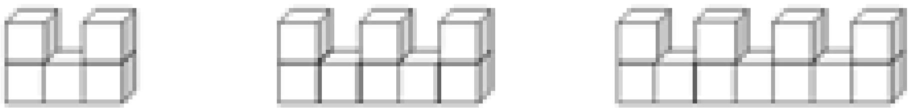


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

a) Qual seria o número de cubos necessários para construir um muro de 10 pontas?

b) Há alguma relação entre o número de pontas de cada muro e a quantidade de cubos necessários para sua construção?

c) Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade de cubos necessários para a construção de um muro com n pontas?

d) Qual seria a quantidade de pontas do muro representado pela Figura12?

e) Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de pontas do muro que ela representa?

f) Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade de pontas do muro representado pela Figura N?

g) Qual seria a quantidade de cubos necessários para a construção do muro representado pela Figura 16?

h) Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de cubos necessários para a construção do muro que ela representa?

i) Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade de cubos necessários para a construção do muro representado pela Figura N?

Fonte: Adaptado de Abreu et al. (2014, p. 26)

O DESENVOLVIMENTO DAS TAREFAS

Escolhidas as tarefas, optei por desenvolvê-las nas salas do 2.º ano do Ensino Médio, a fim de aproveitar o momento para verificar os conhecimentos que obtiveram no 1.º ano, quando se estuda sistematicamente as sequências. Participaram 27 alunos do 2.º A, divididos quase todos em 6 grupos de 4 integrantes, havendo apenas 1 com 3. Os 29 alunos do 2.º B foram distribuídos em 5 grupos de 4 componentes e em 3 trios. Sendo assim, o total de alunos que participou das tarefas é 56. A formação dos grupos foi de livre escolha dos estudantes, desde que fosse respeitado o limite de 4 integrantes.

Cada um desses grupos recebeu uma cópia das tarefas a serem desenvolvidas, com os respectivos espaços para registro dos procedimentos de resolução e das respostas alcançadas. Para esse movimento foram necessárias cinco aulas em cada sala: em média uma aula para a "Tarefa 1", duas para a "Tarefa 2" e duas para a socialização de ambas.

Logo que distribuí as folhas, os alunos queriam saber a "conta" que tinham que fazer e o que exatamente deveriam escrever na folha. Isso se deve a uma tradição de aula de Matemática baseada no "paradigma do exercício" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006), na qual o professor tem o papel de expor os conteúdos e as técnicas de resolução, e os alunos fazem exercícios de livros-texto aplicando diretamente as técnicas apresentadas. Esses exercícios são, na maioria das vezes, realizados individualmente e corrigidos posteriormente, e apresentam somente uma solução correta. Não há espaço para socializações, trabalhos em grupos, problematizações, investigações, resoluções de problemas etc.

Nessa perspectiva, também não há lugar para a escrita como forma de registro de estratégias de resolução, uma vez que somente o resultado é significativo e não o processo. Entretanto, ela deveria ser considerada "uma ferramenta importante para desenvolver e fomentar o aprendizado matemático" (POWELL; BAIRRAL, 2006, p.101), um veículo potencializador de aprendizagens.

Sabia que o início do trabalho com a escrita não é fácil, pois rompe com uma cultura de aula de Matemática, conforme apontam Nacarato e Lopes (2009). Com isso tive que incentivar os alunos a registrar suas ideias, suas estratégias de resolução, ao invés de apresentar apenas um resultado obtido por cálculos.

Além desse incentivo, também fui realizando outras ações durante o desenvolvimento das tarefas, as quais incluíam mediações e problematizações, a fim de levar os alunos a refletirem. Enquanto circulava pelos grupos, não fornecia informações nem dava respostas, mas procurava instigá-los à percepção de regularidades, à realização de generalizações e ao pensamento algébrico, ou seja, buscava levá-los a investigarem, levantarem hipóteses de solução e efetivarem-nas.

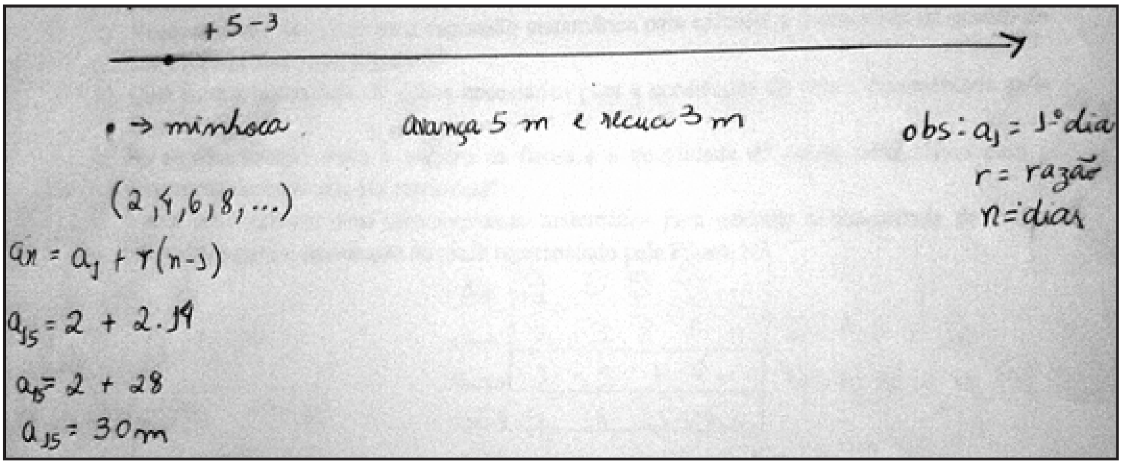
A socialização aconteceu quando todos os grupos finalizaram as duas tarefas. Não propus a discussão da primeira delas antes de iniciarem a segunda, porque, à medida que os grupos iam terminando uma, avançavam na resolução da outra, visto que as duas foram entregues juntas, e eles estavam ansiosos para concluí-las.

A PRIMEIRA TAREFA: DESPERTANDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Conforme mencionado anteriormente, a Tarefa 1 foi utilizada como um disparador do pensamento algébrico. Ela foi preparada com o intuito de que os alunos envolvidos, ao iniciarem a percepção de regularidades, não só se familiarizassem com o tipo de tarefa e de organização da sala de aula, mas também se apropriassem da forma de registrar seus pensamentos e de fazer generalizações, mesmo que de situações mais simples. Tais generalizações seriam aprimoradas durante o desenvolvimento da Tarefa 2, que, por sua vez, possuía um grau de dificuldade maior.

Logo na resolução da primeira questão ("Ao final de 15 dias, a minhoca estará a que distância do ponto de partida?"), alguns grupos já perceberam que se tratava de uma Progressão Aritmética (PA), como mostra o registro da Figura 1:

Figura 1 − Solução relacionando a questão *a* da Tarefa 1 a uma Progressão Aritmética

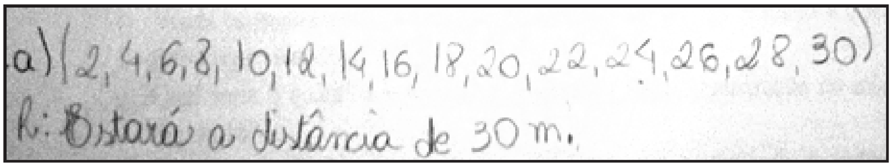


Fonte: Folha de registros dos alunos

Esse grupo, ao organizar as distâncias da minhoca em relação ao ponto de partida em metros, a cada dia, observou que se tratava de uma PA de razão 2. Com isso, aplicou a fórmula do termo geral para determinar a referida distância no 15.º dia.

Outros grupos não tiveram a mesma percepção, mas utilizaram estratégias variadas de resolução que abrangiam desde a enumeração dos 15 primeiros termos da sequência até a utilização de proporcionalidade. Conforme ilustrado na Figura 2, depois de observar que a minhoca se distanciava 2 m a mais do ponto de partida com relação ao dia anterior, os integrantes de um dos grupos optaram pela formação de uma sequência com as distâncias do 1.º ao 15.º dia.

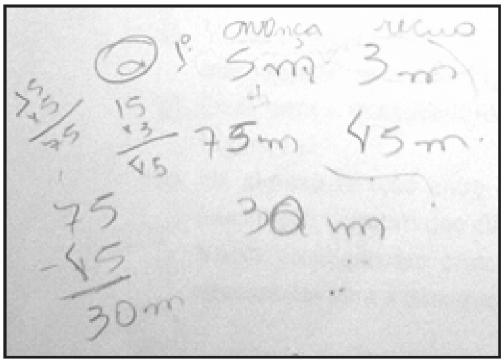
Figura 2 − Solução que utilizou a enumeração dos termos da sequência



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Com relação ao uso da proporcionalidade, surgiram respostas envolvendo tanto a distância avançada e a recuada quanto apenas a distância em que a minhoca estava do ponto de partida (Figura 3).

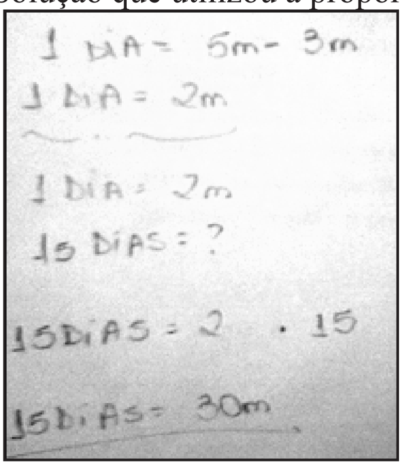
Figura 3 − Solução que utilizou a proporcionalidade 1



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Nesse caso, o grupo, sabendo que a minhoca avançava 5m e recuava 3m a cada dia, obteve a quantidade total de metros que ela avançaria e recuaria em 15 dias e subtraiu uma da outra, encontrando a distância que ela estaria do ponto de partida ao final desse período. Já outro grupo, cujo registro exponho a seguir, constatando que a minhoca avançava apenas 2m com relação ao ponto de partida a cada dia, multiplicou esse valor por 15 e obteve a resposta (Figura 4).

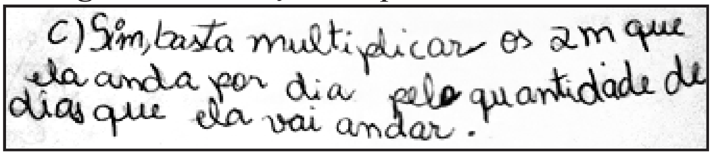
Figura 4 − Solução que utilizou a proporcionalidade 2



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Nas questões seguintes, a constatação de que a regularidade consistia em a minhoca se distanciar do ponto de partida sempre dois metros a mais do que no dia anterior foi evidente. Ela também foi determinante para que os alunos apontassem que, para saber a distância que a minhoca estaria do ponto de partida ao final de qualquer quantidade de dias, bastava multiplicar por 2 (Figura 5).

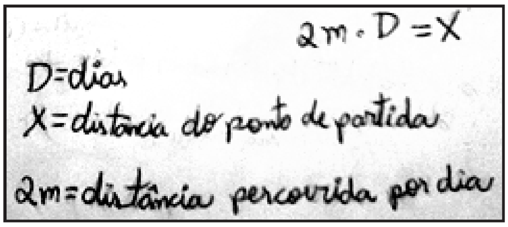
Figura 5 − Solução da questão *c* da Tarefa 1


c) Sim, basta multiplicar os 2m que ela anda por dia pela quantidade de dias que ela vai andar.

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Percebendo que, como esse, outros grupos também apenas escreviam o que deveria ser feito e não criavam uma lei de formação para tal situação, lancei um desafio: "*Mas será que, ao invés de falar tudo isso, não seria possível simplificar isso encontrando uma expressão matemática?*". Com isso, esse grupo buscou uma generalização da situação por meio de uma lei de formação (Figura 6).

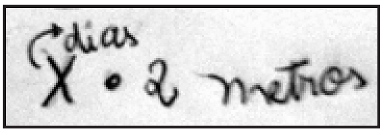
Figura 6 − Generalização do grupo para a questão *c* da Tarefa 1


2m . D = X
D=dias
X=distância do ponto de partida
2m=distância percorrida por dia

Fonte: Folha de respostas dos alunos

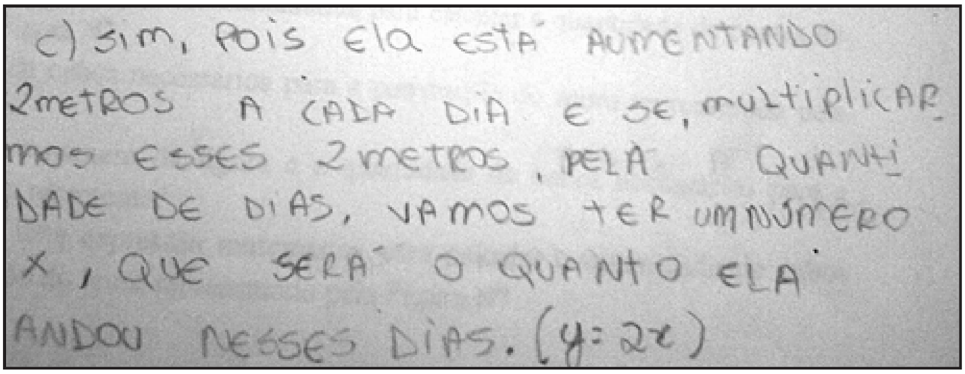
Como o desafio foi também lançado para os demais grupos, entre as respostas apresentadas, encontrei leis de formação de variadas formas (Figuras 7 e 8):

Figura 7 − Generalização 2 para a questão *c* da Tarefa 1


dias
X • 2 metros

Fonte: Folha de respostas dos alunos

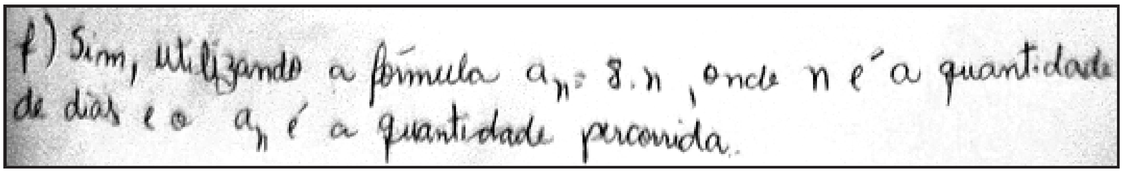
Figura 8 − Generalização 3 para a questão *c* da Tarefa 1


c) sim, pois ela está aumentando
2metros a cada dia e se, multiplicar
mos esses 2metros, pela quanti
dade de dias, vamos ter um número
x, que será o quanto ela
andou nesses dias. ($y=2x$)

Fonte: Folha de respostas dos alunos

A partir desse momento, com os alunos já mais familiarizados com a tarefa e com a percepção das regularidades e da relação com a Progressão Aritmética, a generalização por meio da álgebra ficou mais evidente e começou a surgir. Desse modo, na questão *f* ("Vocês conseguiriam descobrir quantos metros ela terá percorrido ao final de qualquer quantidade de dias? Como?") não precisei fazer questionamentos, como o realizado anteriormente. À exemplo, apresento o seguinte registro (Figura 9):

Figura 9 − Solução da questão *f* da Tarefa 1


f) Sim, utilizando a fórmula $a_n = 8.n$, onde n é a quantidade
de dias e o a_n é a quantidade percorrida.

Fonte: Folha de respostas dos alunos

A partir da identificação de que a cada dia a quantidade percorrida pela minhoca, no total, aumentava em 8m, os grupos perceberam que, para calcular o número de metros percorridos ao final de qualquer quantidade de dias, bastava multiplicar por 8 e expressaram suas generalizações por meio de leis de formação. Assim, acredito que essa primeira tarefa possibilitou o empenho e o desenvolvimento na tarefa seguinte, uma vez que os alunos mobilizaram e se apropriaram de procedimentos de resolução que despertaram o pensamento algébrico.

A SEGUNDA TAREFA: O PENSAMENTO ALGÉBRICO E AS GENERALIZAÇÕES

A Tarefa 2 foi organizada para que os alunos observassem regularidades, estabelecessem relações e generalizassem por meio de uma lei de formação. Objetivava que considerassem três situações: o total de cubos do muro e a quantidade de pontas de cada muro; a quantidade de pontas de cada muro e o número da figura; o número da figura e o total de cubos do muro. Assim, almejava explorar a relação entre as três variáveis envolvidas na tarefa duas a duas, totalizando três combinações diferentes.

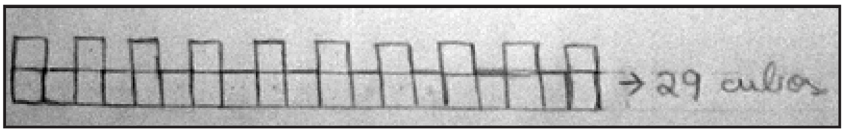
Como já era previsto, alguns grupos apresentaram dificuldades nas generalizações propostas. Além disso, percebi que poderia ter sugerido uma questão sobre a relação entre a quantidade de pontas de cada muro, o total de cubos e o número da figura, uma vez que alguns grupos, mesmo não sendo esse o intuito dos itens propostos, encontraram-na. Considero tal situação como potencialidade da tarefa e a retomarei posteriormente. Além disso, também foi identificada uma variedade de estratégias utilizadas na determinação de um termo da sequência de figuras, assim como foram reconhecidas diferentes leis de formação para uma mesma sequência e notada a equivalência entre elas, por meio de minha mediação.

A VARIEDADE DE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO

Durante o desenvolvimento das tarefas, para cada um dos itens, surgiram diferentes estratégias de resolução. Para ilustrar isso, relato inicialmente uma situação referente à questão *a* da Tarefa 2, na qual os alunos tinham que descobrir a quantidade de cubos utilizados na construção de um muro com 10 pontas. Vale destacar que as pontas são os cubos dispostos separadamente uns dos outros na segunda linha do muro e não os vértices desses cubos.

Alguns grupos optaram pela utilização do desenho (Figura 10). Isto é, como era uma sequência de figuras, fizeram a que tinha 10 pontas, seguindo a regularidade observada e a disposição dos cubos das ilustrações disponíveis.

Figura 10 −Solução que utilizou o desenho

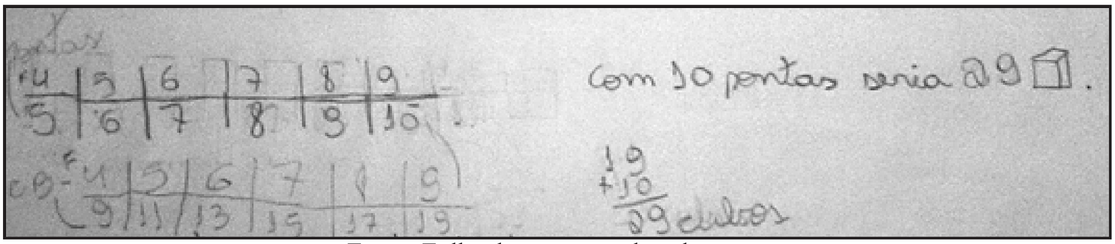


Fonte: Folha de respostas dos alunos

Diante da representação do muro de 10 pontas, os alunos contaram a quantidade de cubos e indicaram que esta correspondia a 29. Como já tinham se apropriado da regularidade para a disposição dos cubos, não houve a necessidade da representação de cada um dos elementos da sequência até chegar à figura de 10 pontas.

Outra estratégia utilizada foi a construção de tabelas relacionando, primeiramente, o número da figura com as respectivas quantidades de pontas e, depois, o número da figura com a quantidade de cubos da parte de baixo do muro em cada uma delas (Figura 11).

Figura 11 − Solução que utilizou tabelas

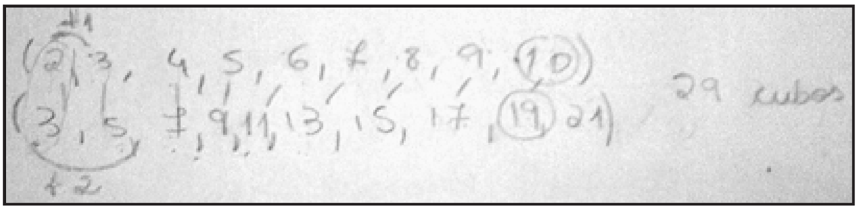


Fonte: Folha de respostas dos alunos

Desse modo, os estudantes fizeram a representação numérica de cada figura a partir da quarta imagem, explicitando que esta teria 5 pontas em cima e 9 cubos embaixo. Indicaram que isso ocorreria sucessivamente até chegar a figura de 10 pontas, que seria a Figura 9 e teria 19 cubos embaixo. Somando as 10 pontas com os 19 cubos de baixo, totalizaram 29 cubos.

Outro grupo seguiu o mesmo raciocínio, mas sem usar a tabela. Os alunos colocaram as quantidades de cubos das pontas e da parte de baixo em forma de sequências (Figura 12).

Figura 12 − Solução que utilizou sequências

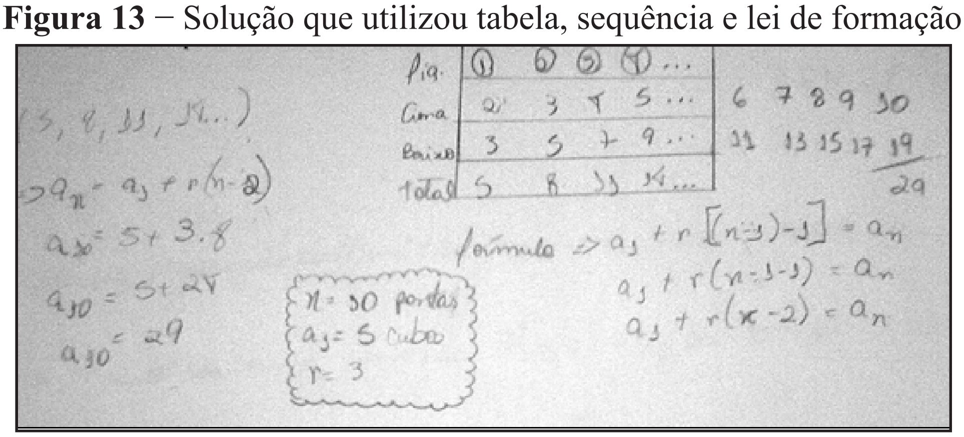


Fonte: Folha de respostas dos alunos

Isso foi possível a partir da descoberta de que a quantidade de pontas aumentava uma unidade por figura ─ era uma PA de razão 1 ─ e a quantidade de cubos da parte de baixo aumentava duas unidades por figura ─ era uma PA de razão 2. Esse pensamento pode ser observado devido à indicação “+ 1”, feita na primeira sequência registrada, e à colocação “+ 2”, feita na segunda.

Além dessas resoluções, um quarto grupo conseguiu utilizar uma estratégia mais bem elaborada, envolvendo tabela, sequência e lei de formação (Figura 13).

Figura 13 − Solução que utilizou tabela, sequência e lei de formação



Fonte: Folha de respostas dos alunos

O primeiro passo, segundo seus integrantes, foi a construção de uma tabela contendo o número da figura, a quantidade de cubos da parte de cima (pontas) e da parte de baixo e o total de cubos do muro representado nessa figura. Em seguida, os alunos completaram a tabela e identificaram 29 como a quantia de cubos da figura de 10 pontas. A partir daí, percebendo que o total de cubos formava uma PA de razão 3, cujo primeiro termo era 5, tentaram utilizar a fórmula do termo geral dessa sequência, mas, ao colocar o n como quantidade de pontas, não obtiveram 29.

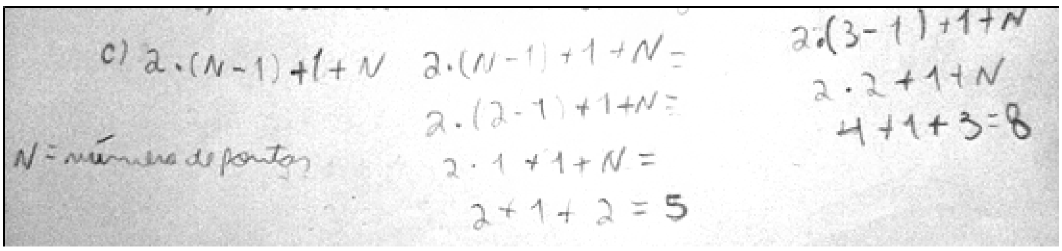
Tendo em vista chegar a esse valor, esses alunos notaram que se não mantivessem a estrutura n – 1 da fórmula e tirassem mais uma unidade ─ ou seja, colocassem n – 2, visto que havia uma diferença de uma unidade entre a quantidade de pontas e o número da figura ─ chegariam à resposta. Assim, determinaram que a lei de formação para a quantidade de cubos do muro de uma figura qualquer dessa sequência é dada por $a_n = a_1 + r.\ (n - 2)$, sendo n a quantidade de pontas.

Desse modo, foi possível perceber que cada grupo pode utilizar uma diferente estratégia de resolução. Cabe ao professor possibilitar um ambiente de comunicação e reflexão e propor uma socialização para que tais estratégias sejam conhecidas, verificadas e discutidas pelos demais grupos, visando a compreensão de conhecimentos algébricos.

DIALOGANDO SOBRE LEIS DE FORMAÇÃO EQUIVALENTES

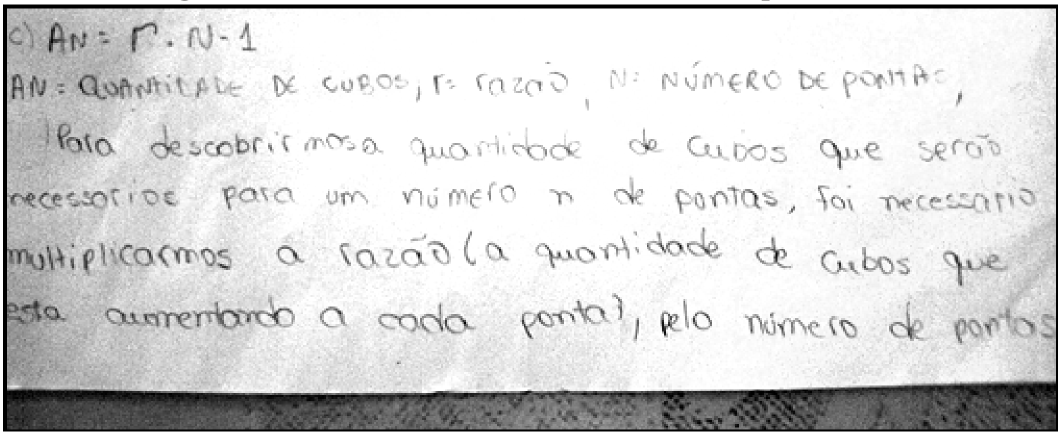
Durante a socialização das tarefas, ficou evidente que diferentes grupos encontraram variadas leis de formação para uma mesma sequência. Então, procurei fazer mediações para levá-los a perceber a equivalência entre elas. Isso aconteceu primeiramente na questão *c* da Tarefa 2, cuja proposta era a criação de uma expressão matemática para calcular a quantidade de cubos necessários para a construção de um muro com n pontas. Exponho alguns dos registros (Figuras 14 e 15) apresentados para essa resolução:

Figura 14 − Lei de formação 1, referente à questão *c* da Tarefa 2



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Figura 15 − Lei de formação 2, referente à questão *c*


c) AN = r . N - 1
AN = QUANTIDADE DE CUBOS, r = razão, N = NÚMERO DE PONTAS,
Para descobrirmos a quantidade de cubos que serão necessários para um número n de pontas, foi necessário multiplicarmos a razão (a quantidade de cubos que esta aumentando a cada ponta), pelo número de pontas

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Na socialização, esses dois grupos falaram das leis de formação encontradas e propus à sala uma verificação de sua validade. Em seguida, questionei-os na tentativa de que percebessem a equivalência entre elas. A fim de elucidar esse movimento, apresento um excerto da transcrição da audiogravação (Quadro 3):

Quadro 3 – Trecho da socialização da questão c da Tarefa 2

Rô: Vocês conseguiram criar uma expressão matemática para calcular a quantia de cubos de um muro de n pontas?

Alexia: Colocamos $a_{n,}$ que é a quantidade de cubos, igual à razão, vezes o número de pontas, menos 1, que fica $a_n = r.\ n - 1$.

Rô: Vamos ver se dá para calcular a quantia de cubos. Quanto vale a razão? O que é razão?

Luana: É 3. É de quanto em quanto vai aumentando. Fica $a_n = 3.\ n - 1$.

Rô: Então, vamos colocar o 3 aqui. O número de pontas é o n. Quantas pontas tem a primeira figura?

Alunos: 2.

Rô: Então, fica 3. 2 - 1, que vai dar...?

Alunos: 5.

Rô: Deu 5, e tem 5 cubos mesmo na primeira. Vamos testar com a segunda: 3. 3 – 1 são 8, e tem 8 cubos. Na terceira, fica 3. 4 – 1, que dá 11. Então, vocês acham que essa expressão permite calcular a quantia de cubos de acordo com a quantia de pontas?

Alunos: Sim.

Rô: Algum grupo colocou outra expressão?

Danilo: Nós fizemos 2. (n – 1) +1 + n.

Rô: Será que com essa expressão também dá certo? O que esse n significa?

Leonardo: Número de pontas.

Rô: Vamos ver: na primeira figura fica 2. (2 – 1) + 1 + 2. Como se resolve isso?

Leonardo: Parênteses primeiro, depois multiplicação.

Rô: Ah, então fica 2 – 1 = 1 e 2. 1= 2. Daí eu faço...?

Leonardo: 2 + 1+ 2 = 5.

Rô: Vamos ver a segunda também: 2. (3 – 1) + 1 + 3. Faço 3 – 1 = 2, depois 2. 2 = 4 e 4 + 1 + 3 = 8. E como vocês chegaram a essa expressão?

Danilo: A gente testou o 2.(n – 1), mas não deu certo. Daí, fomos pensando como teria que ser para *dar certo e chegamos nessa expressão.*

Rô: Mas será que não dá para reduzir essa expressão?

Luana: Dá para juntar o n.

Rô: Mas como eu vou juntar o n?

Leonardo: 2n?

Rô: Será? Vocês acham que dá para reduzir a expressão ou não?

Leonardo: Dá, mas temos que pensar.

Rô: Então vamos pensar juntos? Se eu falar assim "Fui à feira e comprei 2 abacaxis, 1 melancia, depois comprei 2 abacaxis e 3 melancias, depois 10 abacaxis, 2 peras...", eu não poderia ter resumido tudo isso, ao invés de ficar repetindo toda vez abacaxi e melancia?

Alunos: Sim.

Rô: Como?

Leonardo: Juntando.

Rô: E nessa expressão dá para juntar?

Jucelena: Dá pra fazer assim [fazendo gestos com a mão no ar, indicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição].

Rô: Ah, mas fazer assim tem um nome.

Danilo: Distributiva.

Rô: Isso. Daí, eu faço 2.n, que dá?

Alunos: 2n.

Rô: E depois?

Alunos: 2. (– 1) = – 2

Rô: E depois?

Alunos: Copia o que sobrou.

Rô: Fica 2n – 2 + 1 + n. E agora?

Alexia: Você pode fazer 2n + n, que dá 3n e – 2 + 1, que é – 1.

Luana: Isso mesmo.

Rô: Vamos fazer. Vai ficar, então, 3n – 1?

Alunos: Isso.

Rô: E essa expressão não lembra algo que a gente já fez?

Luana: É igual a que tinha a razão que era 3, vezes n e menos 1.

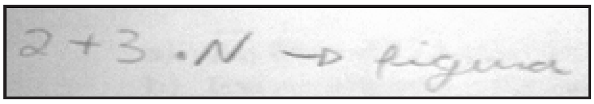
Rô: Isso. Então, vejam que são formas diferentes de representar a expressão, mas que com todas dá para calcular a quantia de cubos. A gente diz, então, que elas são equivalentes.

Fonte: Transcrito pela autora

Assim, os alunos puderam perceber que, mesmo parecendo diferentes, as leis de formação encontradas — 2. (n + 1) + 1 + n e a_n = r. n – 1, com r valendo 3 — eram equivalentes. Ambas permitiam a determinação da quantidade de cubos de um muro, se fosse indicada sua quantidade de pontas, representada por n.

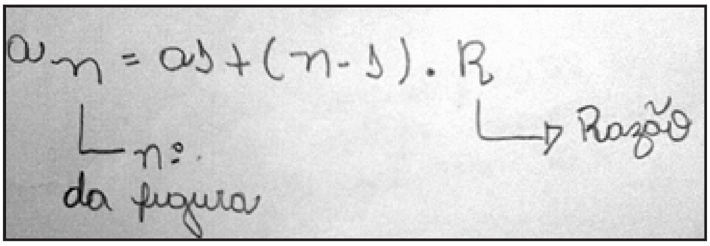
Em seguida, no desenvolvimento da questão *i* da mesma tarefa, cujo objetivo era a criação de uma expressão matemática para calcular a quantidade de cubos necessários para a construção do muro representado pela Figura N, surgiram as seguintes leis de formação (Figura 16 e 17):

Figura 16 − Lei de formação 1, referente à questão *i*



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Figura 17− Lei de formação 2, referente à questão *i*



Fonte: Folha de respostas dos alunos

O trecho a seguir elucida o diálogo ocorrido na socialização da questão. Depois da fala dos dois grupos, verificamos se as expressões eram válidas para encontrar a quantidade total de cubos de acordo com o número da figura. Também questionei a sala a respeito da redução de uma delas, ou seja, da (re)escrita a partir do agrupamento de termos (Quadro 4).

Quadro 4 – Trecho da socialização questão *i* da Tarefa 2

Rô: Na questão i, vocês encontraram uma expressão?

Danilo: Nós colocamos 2 + 3.N, e N é a figura.

Rô: Como vocês chegaram nisso?

Leonardo: É que nós percebemos que em cada figura tem três vezes o número dela mais dois cubinhos.

Daniel: E nós colocamos $a_n = a_1 + (n - 1).\ r$*, a fórmula da PA.*

Luana: Nós também.

Rô: Por que da PA?

Matheus: Porque vai aumentando de 3 em 3 a quantia de cubos de cada figura.

Rô: Ah, muito bem! Vocês viram que apareceram duas expressões diferentes. Vamos ver se é possível calcular a quantia de cubos: nessa primeira, na figura 1, vamos fazer 2 + 3. 1 = 5, na figura 2, 2 + 3. 2 = 8, e assim por diante. Então, deu certo. Agora na outra a gente tem o a_1 *que é 5; mais o número da figura, que é 1; menos 1, que dá 0; e vezes a razão, dá 0; e, somando com 5, dá 5 cubos. Mas eu não consigo reduzir essa fórmula também?*

Luana: Acho que sim.

Rô: Como?

Danilo: Substituindo o a_1 *e a razão.*

Rô: Se eu substituir o a_1 *e a razão, fica 5 + (n – 1). 3. Como eu posso reduzir essa expressão?*

Jucelena: Fazendo a distributiva.

Rô: Daí, 3. n é 3n e 3. (-1) é -3. Fica 5 + 3n – 3. E depois dá para fazer mais alguma coisa?

Leonardo: Dá para fazer 5 – 3, que dá 2.

Rô: Ah, então, vejam que nós chegamos à expressão 3n + 2,

Jucelena: Que é o que o outro colocou. Então, elas também são equivalentes.

Rô: Isso mesmo. Novamente vocês chegaram a expressões que parecem diferentes, mas, na verdade, são equivalentes.

Luana: São equivalentes, então, porque são duas fórmulas diferentes, mas que servem para achar a mesma coisa?

Rô: É, pode-se dizer que sim.

Fonte: Transcrito pela autora

Nessa ocasião, os alunos já sabiam o que tinha que ser feito nas expressões apresentadas e, inclusive, concluíram que seriam equivalentes, uma vez que já tinham vivenciado esse movimento na questão *c*, abordada anteriormente. Ao final, uma aluna explicitou o significado do termo *equivalente* que ficou para ela e buscou uma confirmação do sentido apreendido, no caso das leis de formação para a determinação de um elemento desconhecido da sequência.

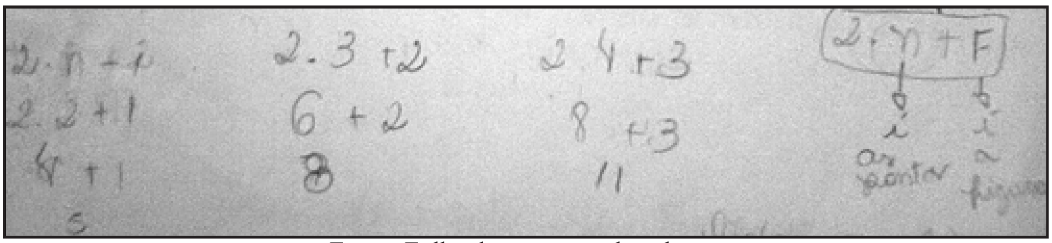
Os referidos diálogos se passaram em uma das salas. Não apresento os que ocorreram na outra, pois os que são aqui relatados foram mais relevantes e as expressões encontradas são praticamente as mesmas.

Esse momento foi importante para que os grupos pudessem perceber que suas respostas, embora parecessem diferentes, eram equivalentes. Também foi significativo para os grupos que não haviam conseguido fazer representações algébricas, visto que estes puderam conhecer algumas das formas de fazê-las. É imprescindível, nesse tipo de tarefa, que o professor proponha a socialização após o término do seu desenvolvimento.

O APARECIMENTO DE UMA RELAÇÃO NÃO PROPOSTA

Na socialização da questão *c* da Tarefa 2 notei que alguns grupos responderam exatamente o que a questão pedia, mas outros criaram uma lei de formação que relacionava as três variáveis ─ quantidade de pontas do muro, número da figura e total de cubos do muro (Figura 18).

Figura 18 − Registro 1 da relação não proposta

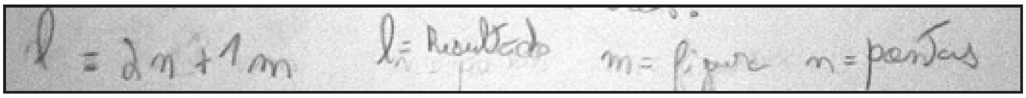


Fonte: Folha de respostas dos alunos

Nesse caso, o grupo descobriu que o dobro do número de pontas do muro (n), somado ao número da figura (F) que representa esse muro, resulta no total de cubos do muro. Para definir a referida relação testaram a hipótese com as figuras 1, 2 e 3, conforme mostra o registro anterior.

Um segundo grupo também encontrou essa relação. Para seus integrantes, o resultado (ℓ) podia ser determinado pela soma do número de pontas (n) multiplicada por 2 e do número da figura (m) multiplicado por 1, como pode ser observado na Figura 19.

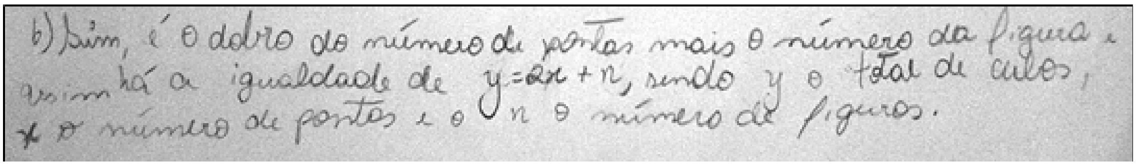
Figura 19 − Registro 2 da relação não proposta


$\ell = 2n + 1m$ ℓ = Resultado m = figura n = pontas

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Além disso, ainda houve outro grupo que já na questão *b*, que propunha a identificação de um vínculo entre o número de pontas de cada muro e a quantidade de cubos necessários para sua construção, indicou uma relação existente entre as três variáveis, esta foi repetida na questão *c*. Neste registro, o grupo explicita a relação existente entre as variáveis e indica a lei de formação, detalhando cada uma de tais variáveis (Figura 20).

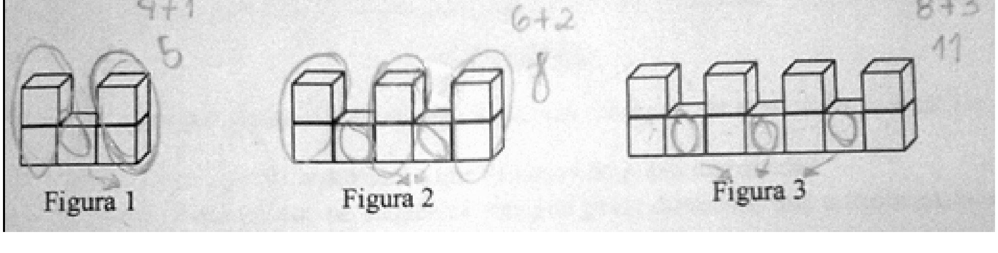
Figura 20 − Registro 3 da relação não proposta


b) Sim, é o dobro do número de pontas mais o número da figura e assim há a igualdade de $y=2x+n$, sendo y o total de cubos, x o número de pontas e o n o número de figuras.

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Todos os grupos em questão justificaram a relação apresentada algebricamente com a disposição dos cubos na construção dos muros, conforme mostra um dos registros, exposto na Figura 21:

Figura 21 − Justificativa dada por um dos grupos para a relação não proposta



Fonte: Folha de respostas dos alunos

As demarcações feitas sobre as figuras indicam o que havia sido notado: o dobro da quantia de pontas, somado ao número da figura (este correspondia aos cubos que separavam uma ponta da outra), resultava no total de cubos do muro representado naquela figura, conforme os próprios grupos haviam observado. Na socialização, deixei claro que não era esse o objetivo da questão, mas indiquei que tinham feito uma descoberta interessante, sobre a qual eu mesma não havia pensado.

Refleti a respeito da situação e percebi que, além da escolha e da adaptação das tarefas, é relevante que elas sejam desenvolvidas tendo em vista possíveis (re)formulações. Assim, penso que, aos itens propostos na Tarefa 2, poderia acrescentar mais um, visando o estabelecimento da relação entre o número de pontas do muro, o da figura e o total de cubos do muro que ela representa, e, consequentemente, a identificação da respectiva lei de formação.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Conforme apontado anteriormente, foi uma experiência nova para os alunos envolvidos, no que se refere à organização da sala, à natureza das tarefas e às ações desenvolvidas tanto por eles quanto por mim. Trabalhar em grupos, registrar estratégias de resolução e comunicá-las com outros alunos não fazia parte da cultura de aula de Matemática com a qual estavam acostumados. Entretanto, eles se envolveram de forma significativa com as tarefas.

Com relação a minha expectativa de que não tivessem tantas dificuldades com o desenvolvimento das tarefas propostas e fizessem generalizações, posso dizer que nem todos os grupos conseguiram identificar regularidades, estabelecer relações e representá-las algebricamente. Desse modo, a mediação foi necessária em vários momentos. Ressalto a importância dessa ação para o desenvolvimento do pensamento algébrico, para o registro e a comunicação das diferentes estratégias de resolução e para a percepção dos alunos relativa à equivalência entre leis de formação.

Destaco também que nesse processo de mediação é indispensável que o professor faça boas perguntas, com a finalidade de ajudar os alunos a avançarem. As problematizações possibilitaram que eles refletissem sobre algo antes não pensado e fizessem relações a fim de dar uma resposta. Esse movimento, além de desencadear o pensamento algébrico, permitiu a produção de sentido e até mesmo a elaboração conceitual.

Saliento que a natureza das tarefas propostas possibilitou que os alunos realizassem generalizações, consideradas por Vale (2013) essenciais para o conhecimento matemático e basilares para o pensamento algébrico, por favorecerem a transição do pensamento numérico para o algébrico. Conforme apontam Hiebert et al. (1997), na escolha das tarefas, há de se considerar que elas devem se constituir problemas para os alunos, devendo ser planejadas de modo que os levem a pensar sobre as estratégias de resolução e comunicar tais estratégias com o outro tanto para (re)pensar sobre seu próprio raciocínio quanto para conhecer o dos outros. Para que se realize investigações e se possa fazer generalizações, Vale (2013) também defende que a seleção das tarefas é fundamental.

Para a autora, as tarefas em contextos figurativos são o ponto de partida para a generalização, uma vez que "a procura e a observação de padrões conduz à elaboração de conjeturas e muitas das vezes à generalização e consequente prova" (VALE, 2013, p. 69). Com base na visão de Radford (2013), a generalização em sequências figurais envolve perceber características comuns a partir de um número de termos, levantar hipóteses para outros termos e, por fim, deduzir uma fórmula. Desse modo, as tarefas propostas, devido a sua natureza, proporcionaram a percepção de regularidades e, a partir desta, a generalização e o estabelecimento de leis de formação.

O desenvolvimento das tarefas em questão mostra que é possível quebrar com uma rotina de aula de Matemática vivenciada pelos alunos. Indica também a necessidade de criar um ambiente de ensino e aprendizagem potencializador e mobilizador do pensamento algébrico.

REFERÊNCIAS

ABREU, Alex et al. *Obmep*: banco de questões 2014. Rio de Janeiro: Impa, 2014.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática*. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

HIEBERT, James et al. *Making sense*: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997.

NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi A. Espasandin. Práticas de leitura e escrita em Educação Matemática: tendências e perspectivas a partir do seminário de educação matemática do COLE. In: LOPES, Celi A. Espasandin; NACARATO, Adair M. (Org.) *Educação Matemática, leitura e escrita*: armadilhas, utopias e realidade. Campinas: Mercado de Letras, 2009. p. 25-46.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. 1ª ed. Campinas: Papirus, 2006.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, Luis et al. (Ed.) *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Comares, 2013. p. 3-12.

VALE, Isabel. *Padrões em contextos figurativos:* um caminho para a generalização em matemática. *REVEMAT*, Florianópolis, v. 8, n. 2, p. 64-81, 2013.

PRÁTICAS FORMATIVAS DO GRUCOMAT: APROXIMAÇÕES ENTRE A ABORDAGEM *TEACHER DESIGN RESEARCH* E AS NARRATIVAS DE AULAS COMO PROMOTORAS DO DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR[1]

Adair Mendes Nacarato
Kátia Gabriela Moreira

INTRODUÇÃO

Como já destacado na Apresentação desta obra, o Grucomat tem uma metodologia de trabalho que vem sendo objeto de discussão e teorização. Como discutido no capítulo 2[2]. Ao conhecermos a Design Research (DR) como uma abordagem metodológica de trabalho e realizarmos diferentes leituras – algumas coletivamente no grupo, outras pelos mestrandos e doutorandos –, nos asseguramos dessa aproximação teórica. No entanto, fomos além, ao assumir, como Bannan-Ritland (2008), a abordagem da Teacher Design Research3 (TDR) como uma prática de formação do professor.

No presente texto, nosso objetivo é analisar essa prática formativa do Grucomat, apontando indícios de como essas abordagens associadas à produção de narrativas de aulas são promotoras do desenvolvimento profissional do professor. Como foco de análise tomamos o caso da professora Kátia – segunda autora deste capítulo. Os dados são constituídos pela narrativa da professora sobre o seu movimento (de ir e vir) do Grucomat para a sala de aula e desta para o grupo, a partir de uma tarefa de generalização de padrões. A análise se apoia no paradigma indiciário de Carlo Ginzburg e na perspectiva enunciativa e discursiva bakhtiniana, em que são tomados os enunciados da professora Kátia, buscando atribuir sentidos possíveis para seus dizeres. A própria seleção desse caso já representou um momento de análise, pois dispomos de um amplo banco de dados e o movimento dessa professora é representativo do nosso trabalho. Organizamos nosso texto em três seções: as narrativas docentes no contexto da teacher design research, o movimento

---

[1] Esta é uma versão ampliada do texto "Narrativas de aulas e design research como práticas de formação do professor que ensina matemática", de nossa autoria, apresentado no VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, realizado em Foz de Iguaçu/PR, em 2018.
[2] Trata-se do capítulo: *Design Research* como abordagem metodológica do Grucomat, de Adair Mendes Nacarato e Kátia Gabriela Moreira.
[3] Optamos por manter a expressão em inglês para não descaracterizar sua abordagem e por não encontrarmos uma traduza que expresse seu sentido.

da professora Kátia no grupo e nossas considerações sobre tal abordagem metodológica.

TEACHER DESIGN RESEARCH MEDIADA PELA PRODUÇÃO DE NARRATIVAS DOCENTES

Aproximamo-nos da *Design Research* (DR) a partir da tese de Mestre (2014). Em um primeiro momento, esse trabalho foi lido pelos pós-graduandos do grupo que estavam envolvidos com as discussões sobre pensamento algébrico; posteriormente, tal abordagem foi compartilhada e analisada pelo grupo. Essa metodologia, segundo a autora, emergiu na década de 1990 e também tem sido designada na literatura como *design experiments*. As referências utilizadas pela autora nos levaram a algumas fontes originais, que passaram a compor o nosso corpo teórico. O que há em comum nas diferentes abordagens relacionadas a essa metodologia é o foco na aprendizagem matemática, interligando a pesquisa com a prática, a fim de promover práticas inovadoras.

Para Molina, Castro e Castro (2007), nessa metodologia, o *design* da instrução e a pesquisa são interdependentes; as situações de aprendizagem constituem o contexto para pesquisa, e a análise contínua e retrospectiva do processo fomenta a elaboração e o desenvolvimento das tarefas (*designs)*. Ela nos permite identificar formas particulares de aprendizagem, estratégias dos alunos e ferramentas educacionais potencializadoras de aprendizagens, produzindo conhecimentos da prática e possibilitando a sua interpretação teórica. As evidências da prática guiam as tomadas de decisão para promover a aprendizagem dos alunos. Dentre as características apontadas pelos autores para essa modalidade de metodologia, vamos destacar aquelas que estão diretamente relacionadas ao movimento do Grucomat.

A DR pressupõe uma sala de aula real onde as aprendizagens acontecem. Quanto aos grupos de trabalho, há diferentes composições possíveis: grupo de pesquisadores trabalhando com estudantes; grupo de pesquisadores trabalhando em sala de aula em colaboração com o professor; grupo de pesquisadores, formadores e professores atuando juntos para promover o desenvolvimento de uma comunidade profissional; ou grupo de pesquisadores colaborando com professores e outros agentes escolares em pesquisas envolvendo várias escolas. No caso do Grucomat, entendemos ser um grupo de pesquisadores – da universidade e da escola básica – atuando colaborativamente.

A DR possibilita a construção de conhecimentos a partir da identificação de regularidades e padrões decorrentes das estratégias utilizadas pelos alunos, e estes são progressivamente refinados pelas evidências captadas no processo. Trata-se de um ciclo contínuo de elaboração da tarefa (*design*), desenvolvimento em sala de aula (momento de intervenção), análise dos dados e reelaboração da tarefa (novo *design*). Nesse ciclo é possível levantar conjecturas sobre as trajetórias de aprendizagens dos alunos, e os envolvidos aprendem através desse processo.

Essa abordagem, tomada como ponto de partida por Bannan-Ritland (2008) para a proposta de *Teacher Design Research* (TDR), visa ao desenvolvimento profissional do professor, ao envolvê-lo no ciclo da DR, promovendo aprendizagens sobre o conteúdo, colocando-o em processos de reflexão sobre suas crenças e práticas.

> TDR desafia os professores a empreenderem atividades de pesquisa em suas salas de aula, ao elaborar e testar materiais instrucionais protótipos (inclusive software), e a participarem de novos procedimentos envolvendo outros professores (trabalhando em grupos de professores e pesquisadores) engajados em múltiplos ciclos de produção de dados sobre aprendizagem de seus alunos. Os fracassos ou sucessos de tais atividades projetadas para a aprendizagem dos alunos podem levá-los a reconsiderar suas ideias sobre ensino, crenças e competências. Assim, os aspectos instrucionais da TDR não vêm de *experts* externos, mas, das experiências cognitivas dissonantes dos professores como planejadores em ciclos de *design*. (BANNAN-RITLAND, 2008, p. 246)

Dentre as diferentes possibilidades de TDR, nos identificamos com aquela que a autora assim explicita: "O desenvolvimento profissional do professor pode ser promovido através de seu envolvimento direto em múltiplos ciclos de TDR". Isso porque nesses ciclos o professor aprende e reflete sobre sua prática e suas aprendizagens. Para isso, o grupo de professores está diretamente envolvido com uma série de atividades como: revisão colaborativa da literatura; análise contextual da sua escola, da sua cultura e do seu entorno; produção e análise de dados dos próprios estudantes e de seus colegas; construção de um quadro teórico baseado em análise de dados; participação em ciclos de avaliação dos protótipos elaborados; e apresentação dos resultados aos pares. Portanto, "os professores compartilham teoria e pesquisas relacionadas, assim como participam em múltiplos ciclos de produção[4] e análise de dados sobre aprendizagens dos alunos e dos professores" (BANNAN-RITLAND, 2008, p. 248).

Nosso olhar é sempre para as aprendizagens dos docentes participantes. No nosso caso, o compartilhamento das pesquisas ocorre por meio das narrativas de práticas, narrativas de aulas, ou, ainda, narrativas docentes, entendidas por nós como sistematização da pesquisa do professor em sua sala de aula. Elas são por nós consideradas como gênero de discurso, possibilitadoras da sistematização e da análise de práticas; configuram-se como pesquisa do professor e prática de autoformação.

> A produção dessas narrativas tem como objetivo não apenas sistematizar as práticas de sala de aula, mas também compartilhá-las com os pares. A produção e a leitura de narrativas de aula pelos pares têm se constituído em práticas de formação e podem possibilitar experiências para o professor. (LUCIO; NACARATO, 2017, p.54)

No ato da escritura da narrativa, os professores podem analisar os discursos matemáticos que circulam em sala de aula, as interações entre os alunos, o papel das mediações docentes, revelando as que foram adequadas e refletindo sobre aquelas que não foram bem-sucedidas. Nas narrativas são trazidas as vozes sociais de um coletivo mais amplo do magistério. No contexto do Grucomat essas narrativas são compartilhadas, discutidas e reescritas e, na maioria das vezes, geram publicações do grupo, em forma de capítulos de livros, artigos em periódicos ou anais de eventos.

---

[4] Embora a tradução original seja "coleta" de dados, optamos pelo termo "produção", visto que coleta pressupõe a existência de dados prontos; os dados são produzidos pelo pesquisador em relação ao seu objeto de pesquisa, à metodologia e aos instrumentos utilizados.

Na próxima seção, analisaremos o movimento da professora Kátia em sua sala de aula, com uma tarefa elaborada no trabalho do grupo.

OS CICLOS DE *TEACHER DESIGN RESEARCH* VIVIDOS PELA PROFESSORA KÁTIA

Envolvida e motivada pelas discussões do Grucomat, a professora Kátia tomou algumas tarefas[5] elaboradas pelo grupo para o desenvolvimento de sua pesquisa, visto que eram tarefas de cujo processo de elaboração e discussão participou e, por isso, acreditava que elas poderiam engajar os alunos em boas discussões em torno do pensamento algébrico. A tarefa dos "Palitos", aqui selecionada, foi desenvolvida na segunda quinzena do mês de novembro/2017, com o objetivo de que os alunos de 1.º ano do ensino fundamental percebessem a regularidade da sequência e desenvolvessem estratégias para sua generalização. Tratava-se de uma classe com 26 alunos, de uma escola pública do município de Nazaré Paulista, no interior de São Paulo. A partir de agora, destacaremos excertos[6] da narrativa da professora Kátia. Durante a aula, a professora fazia registros rápidos e, no momento da produção da narrativa, ela recorreu à videogravação para recuperar os diálogos em sala de aula.

Excerto 1: *O início da tarefa*

Com as crianças organizadas em duplas, entreguei uma cópia da seguinte tarefa para os alunos, com 10 palitos de sorvete, com o intuito de que reproduzissem a sequência, conforme Figura 1.

Figura 1 – Tarefa 2: Continuando com triângulos

Tarefa 2: Continuando com triângulos

Material necessário: cópia da tarefa a seguir para distribuir aos alunos.
Observe a sequência abaixo:

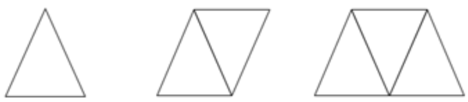


FIGURA 1 FIGURA 2 FIGURA 3

1. Com os palitos distribuídos pelo seu professor, reproduza a sequência dada.
2. Agora responda:
Como você pode observar, nessa sequência há um padrão. Conte a respeito do que descobriu.
Qual seria a próxima figura da sequência? Como você sabe disso? Desenhe essa figura.
Quantos triângulos são necessários para construir a 10.ª figura? Explique como você chegou a essa conclusão.
Quantos triângulos são necessários para construir a 27.ª figura? Explique como você chegou a essa conclusão.

Fonte: Acervo Grucomat

[5] As tarefas produzidas pelo grupo, referentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico, estão em Nacarato e Custódio (2018).
[6] Dada a extensão da narrativa, trazemos apenas alguns excertos para análise e discussão. P refere-se à professora e as vozes dos alunos são apresentadas com nomes fictícios.

Logo que as crianças receberam a tarefa, elas já entraram no movimento de busca pela regularidade da sequência, visto que elas já tinham se apropriado do movimento de tarefas anteriores nas quais eram desafiadas a buscar pelas regularidades das mesmas. Tal processo é destacado no excerto abaixo:

Tales: O Prô, agora eu já lembrei um negócio. É igual aquela lá, olha: [nesse momento aponta para o 1.º termo da sequência] *aqui tem 1,* [aponta para o 2.º termo] *aqui tem 2,* [aponta para o 3.º termo] *aqui têm três.*
P: O quê? 1... O quê?
Tales: 1, 2, 3... Daí, olha... Espera aí [pensativo]*, está aumentando.... Aqui* [aponta para o 1.° termo] *têm 3. Aqui vai formando 1,2,3,4... 5. Vai formando 5.* [aponta para o 2.° termo]. *Aqui [aponta para o 3.° termo], vai formando 1,2,3,4,5,6,7... Vai formando o 7! Vai pulando em 3* [aponta para o 1.° termo]*, em 2 [*aponta para o 2.° termo*] e em... 2* [aponta para o 3.° termo] *[...].*

Pode-se destacar o movimento do aluno Tales, que, assim como a maioria dos alunos envolvida na busca pela percepção da regularidade e resolução dos desafios propostos pela tarefa, ora considerava a quantidade de palitos enquanto regularidade da sequência, ora considerava a quantidade de triângulos. Tal fato comprometeu a resolução da tarefa, visto que as crianças, a exemplo de Tales, se confundiam na hora de elaborar e argumentar suas estratégias. [...] Nesse primeiro dia da tarefa, destinado a que os alunos realizassem em duplas a proposta, enquanto eu passava pela turma realizando intervenções, fiquei preocupada com as confusões apontadas pelas crianças. Teria eu escolhido uma tarefa muito além dos conhecimentos que eles tinham para sua resolução? E, se assim o fosse, o que poderia fazer, no momento da socialização, para que pudessem resolver a proposta? Fiquei intrigada com os movimentos, mas não consegui pensar em uma estratégia e muito menos tive a percepção do que as crianças me apontavam com "as confusões". Cheguei à conclusão de que era uma tarefa muito difícil para meus pequenos [...]. (grifos nossos)

Nesse primeiro excerto identificamos elementos que caracterizam a prática da professora: o trabalho em duplas, de forma que os alunos possam negociar entre eles as possibilidades de resolução da tarefa; os discursos matemáticos que emergem no contexto da resolução (palavras e gestos para explicar o raciocínio); as intervenções problematizadoras da professora; as reflexões produzidas diante do caminho adotado pelos alunos, que não era o esperado pela professora, nem pelos participantes do Grucomat, ao elaborar essa tarefa. Nela há elementos que apontam para indícios de sua prática problematizadora e reflexiva, conforme nossos grifos na sua narrativa. Sua conclusão, num primeiro momento: a tarefa estava além da capacidade dos alunos. Até esse momento, ela não havia questionado a inadequação da proposta, nem o quanto ela havia sido induzida pelo próprio movimento do grupo na sua elaboração. Evidentemente, ao propor o uso dos palitos para a montagem da sequência, a regularidade passa a ser o número de palitos, não de triângulos. A professora trouxe para si a responsabilidade da inadequação da tarefa.

Excerto 2: Retomada da tarefa

> *[...] retomei a tarefa no dia seguinte, a fim de que terminássemos as discussões. Assim, passei a fazer questionamentos. Já no início das problematizações, Tales aponta para a estratégia de considerar a quantidade de palitos relacionada ao número da figura como regularidade da sequência. Busco colocá-lo no movimento de reflexão acerca da estratégia que estava sugerindo – quantidade de triângulos relacionada ao número da figura – estratégia essa retomada da tarefa anterior e que poderia ser aplicada nessa, caso estivéssemos considerando os triângulos ao invés dos palitos. Naquele momento, era perceptível o quanto os alunos eram fiéis aos resíduos deixados pelas tarefas anteriores e, partindo dessa fidelidade, queriam aplicar o que deu certo nas tarefas seguintes. O que não era perceptível para mim, era que os alunos tinham razão em apontar essa estratégia e que os meus encaminhamentos para tarefa é que comprometeram o desenvolvimento da mesma. Ora, o nome da tarefa já anunciava algo importante "Continuando com triângulos" já referenciando uma sequência de triângulos e não, como sugeri, entregando os palitos de sorvete, uma sequência de palitos. Durante a elaboração da tarefa nosso grupo não pensou nos delineamentos que a proposta e a escolha de distribuir os palitos juntamente com a tarefa poderiam causar. Eu só tomo consciência desses delineamentos quando me dedico à escrita da narrativa dos movimentos vivenciados em sala de aula. No momento em que estava imersa na dinâmica da sala de aula, não tive a percepção de que eu mesma havia traçado dois caminhos para essa sequência: considerar o padrão dos triângulos ou considerar o padrão dos palitos. E isso, se tornou um grande desafio para as crianças. [...] (grifos nossos)*

Esse segundo excerto nos revela o momento em que a professora Kátia tomou consciência de que o modo como havíamos elaborado a tarefa no Grucomat não tinha sido o melhor. As crianças lhe mostravam que o caminho para eles era outro: encontrar a regularidade no número de palitos a cada figura da sequência recursiva. Tal constatação só foi possível porque a professora havia gravado as falas dos alunos e videogravado os momentos da discussão coletiva. Essa prática aproxima-se da perspectiva da DR, pois ela pôde captar, nos momentos de discussão e intervenção, as evidências das estratégias dos alunos. E isso foi possibilitado pela análise que Kátia realizou da tarefa e pela produção da narrativa, evidenciando o quanto a escrita é um processo de autoformação do professor, pois no ato de escrever há movimento e organização da experiência a ser narrada, o que provoca reflexões.

Excerto 3: Os alunos buscam pela generalização

> *[...] Após alguns minutos de discussão, a aluna Jade responde à questão "a", que fazia referência a quantidade de triângulos necessários para a construção da 10.ª figura, explicando aos colegas que o número de triângulos variava de acordo com o número da figura, concluindo que a figura 10 teria 10 triângulos. Percebemos que as crianças passaram a considerar a quantidade de triângulos, em resposta ao próprio enunciado da questão que pedia: "Quantos triângulos são necessários para construir a 10ª figura?". Uma percepção que parecia óbvia, do ponto*

de vista do professor, mas que só tomamos consciência – enquanto grupo de pesquisa – através do processo reflexivo oportunizado pela narrativa. Aqui, minha narrativa de sala de aula se mostra a serviço de um contexto maior, de um grupo de pesquisa, que por sua vez, tem uma visão mais ampla quanto aos aspectos da educação, evidenciando o quanto as histórias de vida, as histórias vividas e compartilhadas através das narrativas se entrecruzam com outras histórias, outras narrativas, num movimento tridimensional, entre o espaço, tempo e a história. Ainda sem essas percepções, retomei a tarefa com as crianças a fim de realizarmos a socialização e o fechamento da mesma em que novamente convido as crianças para a análise e reflexão da Tarefa dos Triângulos, que mais tarde, com a reflexão da/na prática, se concretizou como Tarefa dos palitos. Nesse momento da socialização, a aluna Jade retoma a questão da quantidade de palitos. Para mostrar aos colegas como estava pensando, ela vai até à lousa e começa a explicar a regularidade: "aqui nós não estamos usando três palitos? [figura1]. Aqui, 3 + 2 [figura 2]"... Nesse momento eu a consulto se posso anotar seu raciocínio na lousa e, à medida que ela vai falando, eu anoto: figura 1: 3; figura 2: 3 + 2; figura 3: 3 + 2 + 2... Nesse momento outras crianças entram na conversa e vão ajudando Jade na análise da regularidade, baseado na percepção de que, a cada figura, aumentavam dois palitos. Os alunos apresentam indícios de um processo de generalização da sequência, ao perceberem a regularidade e buscarem uma linguagem aritmética para representá-la. Embora não identifique uma generalização algébrica, entendo que tais movimentos se evidenciam como sendo importantes para esse processo [...]. (grifos nossos)

Esse excerto nos revela o quanto o ambiente de investigação e problematização em sala de aula é rico e marcado pelo imprevisível. Inicialmente, Kátia assumiu, conforme grifos na narrativa, que sua prática contribuiria para a reflexão dos colegas do grupo, revelando o sentimento de pertencimento ao grupo e o quanto a análise das práticas baseadas na DR são contributivas para o desenvolvimento profissional dos envolvidos (TDR). Há indícios de apropriação, por parte da professora, de análises teóricas relativas ao pensamento algébrico, numa relação dialética entre a prática e a teoria. Os estudos teóricos lhe faziam sentido. Os alunos aceitaram a condução da tarefa que a professora desejava: generalizar o número de triângulos para uma figura qualquer da sequência. No entanto, eles se mostravam envolvidos para ir além daquilo que a tarefa exigia. A professora saiu de sua zona de conforto e se arriscou com os alunos. Ela sabia que, se não desse conta, poderia contar com o grupo para ajudá-la.

Excerto 4: Generalizando o número de palitos na construção dos triângulos

A partir das problematizações e em resposta ao próprio enunciado da sequência, as crianças passaram a considerar a regularidade dos triângulos. [...] Em busca de envolver os alunos na construção de uma lei de formação para a sequência, retomei as discussões com o foco na elaboração de uma tabela, para que assim, pudessem ter uma nova possibilidade de visualizar as regularidades da sequência.

Figura 2 - Registro da sequência de palitos na lousa

Fonte: Acervo da professora

À medida que os alunos opinavam, eu desenhava as figuras na lousa e, ao mesmo tempo, construía uma tabela, inicialmente com duas colunas: figura e total de palitos. Jade é quem possibilita que os alunos entrem na percepção da regularidade, ao mostrar, indo até à lousa, que a segunda figura 2 tem 3 + 2 palitos, a figura 3, 3 + 2 + 2... nesse momento, Antônio diz: "3 + 4", o que é refutado por Jade: "Não, tem que seguir, olha: aqui não tem 3 +2? Aqui 3 + 2 + 2"[7]*. Essas observações são registradas na tabela. À medida que o diálogo continuava, senti necessidade de construir uma terceira coluna: Quantos "2" usamos? e vou registrando os valores:*

Tabela 1: Em busca de uma generalização

FIGURA	TOTAL DE PALITOS	QUANTOS "2" USAMOS?
Figura 1	3	0
Figura 2	3 + 2	1
Figura 3	3 + 2 + 2	2
Figura 4	3 + 2 + 2 + 2	3

Fonte: Acervo da professora

A partir daí, os alunos vão percebendo as relações existentes nas colunas e vão levantando hipóteses [...] finalmente, com minhas intervenções, vão percebendo que o número de "2" é sempre uma unidade a menos que o número de palitos, prevendo por exemplo, que na figura 100 haverá 3 mais 99 números 2:

P: O que a gente percebeu?
Jade: É só seguir a ordem dos números até o 4.
P: Então, na figura 10, quantos 2 a gente vai precisar?
Jade: 6! Por que ali não tem o zero?
P: Mas, presta atenção... figura 1, 0; figura 2, 1; figura 3,4;
Jade: Oh, prô, tira o zero!
P: Mas, olha, na figura 1 nós não somamos nenhum 2...
Jade: Vai fazendo as contas ali...
P: Mas eu já fiz aqui na tabela.
Antônio: 9!
P: Por que você acha isso?
Antônio: Porque com o 8 não vai dar certo...
Jade: [se dirige até a lousa] *é 9 mesmo! Olha: 5,6,7,8,9...* [contou os espaços abaixo

[7] É importante destacar que os alunos ainda não tinham estudado a multiplicação.

da tabela].
P: Vocês descobriram o segredo! [registra a figura 10] *Então, eu vou pensar em um número que não está aqui. Vou pensar no 35.*
Tales: Prô, ali ta aumentando [1.ª coluna da tabela] *e ali diminuindo* [3.ª coluna da tabela]
P: Isso, Tales. Você percebeu uma coisa interessante... no número da figura está diminuindo 1 para a quantidade de 2. No 5 [aponta para a figura] *vocês não falaram que são 4, números 2? 4, vocês não falaram que são 3? E no 35? Quantos 2 iremos repetir?*
Laura: 34!
P: E no 100?
Tales: Vai ficar 90, se tirar o 1.
P: 90?
Antônio: 99!
P: Então, eu tenho que fazer o 3, mais 99 números 2. [registra na lousa 3 + 99 NÚMEROS 2]
Tales: Eu sei, vai ficar o 100 e 90. Por causa se tirar um...
Jade: Cento e noventa...
P: Quanto que é 1000 tira 1? 999...
Tales: 999.
P: [registra na lousa 3 + 999 números 2]

Acredito que, mesmo a partir de uma proposta conturbada, que só ficou clara no momento da escrita da narrativa, o processo de problematização e construção coletiva no grupo garantiu o sucesso da tarefa. Tal processo de construção coletiva é marcado pelo meu movimento de "idas e vindas" envolvida no processo de construção de conceitos, assim como meus alunos, que dizem muito para este processo. No entanto, esses "dizeres", na maioria das vezes, passam despercebidos no ambiente dinâmico da sala de aula e só podem ser retomados e refletidos, a partir de uma prática que se dedica à reflexão da experiência, ou seja, a partir de uma prática narrativa. (grifo nosso)

Esse excerto é revelador da postura investigativa da professora e do quanto ela se apropriou de diferentes estratégias para contribuir para os avanços dos alunos. A construção da tabela foi fundamental para organizar as ideias dos alunos; a partir dela, os alunos foram observando e levantando hipóteses; a fala de um aluno possibilitava que outro refizesse suas ideias e as apresentasse à classe. Este é o ambiente que defendemos no Grucomat: um ambiente de aprendizagem, de elaboração conceitual, em que a professora está aberta a ouvir os alunos, pois eles "dizem muito para este processo". A professora coloca em movimento seus saberes: 1) por exemplo, a construção da tabela como forma de organização dos dados relativos à sequência e, em razão da interferência dos alunos, ela ampliou uma coluna na tabela, o que foi fundamental para que eles percebessem a relação entre o número da figura e o número de palitos acrescentados; 2) os modos como pôde conduzir o processo, pois, como os alunos ainda não tinham estudado a multiplicação, ela organizou a lei de formação com a adição de parcelas iguais.

A VOLTA DA TAREFA AO GRUCOMAT

Como é prática do grupo, Kátia trouxe sua narrativa para ser compartilhada com os colegas, os quais puderam não apenas avaliar a inadequação da tarefa, como contribuir para que ela ampliasse seu processo analítico da sequência de aulas. Assim que ela leu o excerto 1 no Grucomat, os colegas, diante do diálogo com os alunos, já discutiram a inadequação da tarefa. De fato, o modo como ela foi elaborada e planejada para a sala de aula induziria os alunos a essa duplicidade de interpretação. Se o objetivo da tarefa era criar uma lei de formação para o número de triângulos [as questões C e D direcionavam para a quantidade de triângulos], a distribuição dos palitos não deveria ocorrer. Como conclusão, o grupo sugeriu o desdobramento da tarefa em duas partes: uma primeira parte com a generalização do número de triângulos, em função da posição da figura na sequência, podendo ser apenas as figuras impressas ou incluir a distribuição de representações triangulares, recortadas em papel ou EVA, para que os alunos montassem a sequência; uma segunda, com a generalização do número de palitos, para a construção de cada figura da sequência, com o apoio do uso de palitos.

Emergiu também nessa discussão o quanto os professores dos anos iniciais ainda se apoiam no papel dos materiais manipuláveis para a construção dos conceitos matemáticos. As discussões possibilitadas pela tarefa nos sinalizam que, em alguns contextos, eles acabam sendo complicadores. No entanto, há que se considerar, ainda, o quanto a tarefa foi rica e envolveu os alunos em cinco aulas, como relatado por Kátia. Concluímos que "é o aluno quem vai nos dizer se uma tarefa está adequada ou não". Mas isso depende da postura investigativa do professor; uma mesma tarefa poderá produzir outros resultados em distintas salas de aula.

Na análise da narrativa, também discutimos o quanto o professor, quando se sente participante de um grupo, acaba legitimando o discurso nele existente. No caso de Kátia, ela se manteve fiel ao que os colegas haviam proposto, e suas intervenções, logo no início do diálogo com os alunos, ao questionar Tales: "O quê? 1... O quê?", gerou a dúvida no aluno, que desviou sua atenção dos triângulos para os palitos. E, a partir daí, os alunos se alternaram nas observações: número de palitos e número de triângulos. Há, ainda, que se considerar que Kátia é pedagoga, e sua confiança para ensinar temas matemáticos — até então não usuais em sua prática, como tarefas voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico — decorre de sua participação no Grucomat, ou seja, suas intervenções se apoiavam naquilo de que ela havia se apropriado nas discussões do grupo. No entanto, ela estava sensível às falas dos seus alunos, conseguia colocar-se aberta às estratégias e às ideias que eles apresentavam e, mesmo sem o tempo suficiente para recorrer ao grupo e solicitar ajuda, ao ler seus registros manuscritos para a produção da narrativa final, por si só, já se deu conta de que poderia ir além da simples generalização do número de triângulos e generalizar com o número de palitos na construção dos triângulos. Sua narrativa, assim como a tarefa, foi reescrita após a discussão.

PARA FINALIZAR

Foi possível perceber o quanto a professora Kátia – num sentimento de pertencimento – se apoia no Grucomat para lidar com suas incertezas frente aos desdobramentos da tarefa em sala de aula, olhando assim, não só para o processo dos alunos, mas também para o seu próprio processo de formação. O Grucomat, por contar com pedagogos e professores especialistas em matemática, possibilita essa ajuda mútua, a reciprocidade de produção de saberes. Nos movimentos narrados pela professora, percebemos como a produção do Grucomat foi tomada por ela com um senso de muita confiabilidade, uma vez que a sequência de tarefas fazia parte de todo um movimento de reflexão teórica, de discussões, de trocas e de aprendizados colaborativos possibilitados pelo grupo. No entanto, não prevíamos os diferentes caminhos que a tarefa poderia tomar, ao entrar em contato com a realidade dos alunos. Quando a professora percebeu a quebra dessa "confiabilidade", ela tentou entender o que os alunos estavam dizendo. Contudo, naquele movimento dinâmico da sala de aula, se tornou muito difícil. Tal percepção só veio com a escrita posterior da narrativa, quando pôde refletir e constatar o problema da tarefa apontado pelas crianças, dada a incoerência entre o enunciado e a disponibilização do material manipulativo.

A narrativa e o movimento de Kátia provocaram um ciclo de TDR no Grucomat. E esse processo não se finda após a produção da narrativa, visto que o texto escrito permite retomadas e ressignificações. Assim, a narrativa, além de contribuir para a formação na e da prática dessa professora, favorece o processo coletivo de formação do Grucomat. O olhar do outro é sempre constitutivo do nosso próprio olhar, tal como postula a perspectiva bakhtiniana; nos constituímos na alteridade, e as narrativas de aulas possibilitam que nos reconheçamos nas histórias narradas e possamos refletir sobre nossas próprias práticas, num processo colaborativo de formação. Nesse movimento aprendemos e nos desenvolvemos profissionalmente.

REFERÊNCIAS

BANNAN-RITLAND, Brenda. Teacher design research: An emerging paradigm for teachers' professional development. In: KELLY, Anthony E.; LESH, Richard A.; BAEK, John Y. (ed.). *Handbook of design research methods in education*. New York: Routledge, 2008. p. 246-262.

LUCIO, Claudia C. Bredariol; NACARATO, Adair Mendes. Narrativas de aula como práticas de letramento docente. In: NACARATO, A. M. et al. *Práticas de letramento matemático nos anos iniciais:* experiências, saberes e formação docente.1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2017. v.1, p. 45-75.

MESTRE, Célia Maria Martins Vitorino. *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade:* uma experiência de ensino. 2014. 380p. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Portugal, 2014.

MOLINA, Marta; CASTRO, Enrique; CASTRO, Encarnación. Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, Mahwah:* NJ, v. 2, n. 4, p. 435-440, 2007. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/547/1/MolinaM07-2864.PDF. Acesso em: 05 jun. 2018.

NACARATO, Adair M.; CUSTÓDIO, Iris A. (org.). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica:* compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática [livro eletrônico]. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. (Coleção SBEM, v. 12). Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf. Acesso em 01 fev.2019.

TAREFAS PARA PROMOVER E DAR SUPORTE À AGÊNCIA MATEMÁTICA DE APRENDIZES

Arthur B. Powell - Rutgers University-Newark, EUA
Tradução: Bruna Moustapha-Corrêa (UNIRIO)

Tarefas matemáticas podem tanto desempoderar quanto empoderar os aprendizes. Elas os tornam consumidores de matemática ou produtores dela. Como observa Zevenbergen (2005), muitas das práticas atuais na matemática escolar, como a ênfase no conhecimento procedimental, criam um habitus matemático que está longe de empoderar os aprendizes e, na verdade, os desencorajam com relação à disciplina. Para que os aprendizes se envolvam e se sintam empoderados a participar da matemática, eles devem ter, além do conhecimento procedimental, dois outros componentes: (1) conhecimento relacional ou conceitual (SCHMITTAU, 2004; SIMON; TZUR; HEINZ, 2004; SKEMP, 1976; SKEMP, 1987) e (2) agência (BANDURA, 2006; MUELLER; YANKELEWITZ; MAHER, 2012; POWELL, 2004). Embora a literatura em educação matemática esteja repleta de estudos sobre o aprimoramento da compreensão conceitual dos alunos por meio de tarefas, pouco se sabe sobre como estruturar tarefas matemáticas para engajar sua agência, de modo a gerar ideias matemáticas. Neste capítulo, apresentamos evidências de tarefas estruturadas para oportunizar aos estudantes exercitarem sua agência matemática.

Antes de apresentar nossa concepção de agência matemática, exporemos as características das tarefas matemáticas que, em nossa visão, empoderam. Depois de descrever a agência, contrastaremos duas tarefas "similares", para ilustrar as características que empoderam. A descrição do contraste será seguida de exemplos de tarefas sobre fração que promovem e dão suporte à agência matemática dos estudantes.

ESTRUTURA CONCEITUAL PARA TAREFAS E AGÊNCIA MATEMÁTICA

Para desenvolver nossa visão das tarefas matemáticas, focamos conceitualmente na agência matemática, nas ferramentas epistêmicas, nos conteúdos arbitrários e necessários, e no que significa fazer matemática. No que diz respeito às tarefas, concordamos com Sierpinska (2004, p. 10), que considera que "o design, a análise e o teste empírico de tarefas matemáticas, seja para fins de pesquisa ou de ensino, é uma das responsabilidades mais importantes da educação matemática". As ideias sobre o *design* e a análise de tarefas matemáticas dependem do que se entende por "fazer matemática". **Fazer matemática.** Nossa visão do que significa fazer matemática é psicológica e dialógica, segundo a perspectiva de Gattegno (1987, p. 13-14), que postula que o fazer matemático emerge do diálogo e da percepção:

> Ninguém duvida de que a matemática, por si própria, é o mais claro dos diálogos da mente consigo mesma. A matemática é criada por matemáticos conversando primeiro consigo mesmos e depois com um outro. Ainda assim, porque esses diálogos poderiam se combinar com outros diálogos que se referem às percepções da realidade existentes fora do Homem ... Com base na consciência de que as relações podem ser percebidas tão facilmente como objetos, a dinâmica que liga diferentes tipos de relações foi extraída pelas mentes de matemáticos e consideradas *per se*.

Tem-se matemática quando um matemático ou qualquer interlocutor fala consigo mesmo ou com outros sobre objetos específicos, sobre relações entre os objetos e sobre as dinâmicas envolvidas nessas relações (ou relações das relações). Conforme Powell e Alqahtani (2015) discutem, para diálogos sobre relações e dinâmicas serem objetos de reflexão persistente, é crucial que eles não sejam efêmeros, mas possuam registro ou inscrição material (física ou simbólica). Por um lado, por meio das interações discursivas, os interlocutores podem criar inscrições e, durante ações comunicativas, construir para elas significados compartilhados. Por outro lado, as inscrições podem abrigar significados codificados que – com base em interações discursivas anteriores – os interlocutores podem apreender, à medida que os decodificam. Dessa forma, significados relativos às inscrições e o conteúdo específico da experiência são dialeticamente relacionados e mutuamente constitutivos por meio do discurso. **Conteúdo arbitrário e necessário.**

Pelo discurso, os interlocutores ou constroem o conteúdo matemático ou se tornam conscientes dele, a partir de outros. Esse conteúdo, como afirma Hewitt (1999), pode ser dividido em duas categorias. O primeiro pertence ao conteúdo, que é *arbitrário*, no sentido de que se refere a convenções semióticas históricas e culturais, como nomes, diagramas e notações. São exemplos os símbolos e os nomes de números; os eixos cartesianos e os nomes e os símbolos das coordenadas; e as regras de notação para expoentes integrais. Essas convenções semióticas poderiam ter sido diferentes e, por isso, são consideradas arbitrárias. Além disso, elas não podem ser construídas ou apropriadas por meio de observação ou percepção atenta, mas devem ser conhecidas pela memorização e pela associação.

A segunda categoria diz respeito ao conteúdo matemático, que Hewitt (1999) chama de *necessário*, logicamente necessário. São ideias ou propriedades que podem decorrer da observação e do atendimento às relações entre os objetos, bem como das relações dinâmicas que os ligam. Por exemplo, quando dois círculos planares e congruentes têm exatamente dois pontos de interseção, um triângulo isósceles sempre pode ser formado, escolhendo seus vértices como os centros desses círculos e um de seus pontos de interseção. Essa conclusão não poderia ser outra e, portanto, é logicamente necessária. Embora seja derivável, uma vez conhecida pode ser considerada uma ferramenta cultural verificável, que pode ser usada para resolver problemas e usada como base para outros resultados. Relações entre objetos, dinâmicas de relações e propriedades que podem ser trabalhadas (logicamente) são conteúdos matemáticos necessários. São ideias matemáticas específicas, ferramentas históricas e culturais que podem ser apropriadas por meio da consciência.

A apropriação, por um aprendiz, de um conteúdo matemático específico e necessário depende da consciência que ele já possui desse conteúdo e de sua observação atenta. Em consonância com a proposta de Hewitt (1999, p. 4), a conscientização e a observação são elementos que precisam ser considerados no *design* de tarefas: "Se um estudante tem a conscientização necessária de alguma coisa, então sugiro que o papel do professor não seja informar ao estudante, mas introduzir tarefas que ajudem os estudantes a usar sua consciência para que saibam o que é necessário".

Neste paradigma pedagógico, se os estudantes não tiverem a consciência requerida, eles são convidados a se engajar em tarefas que apoiem a sua construção. Construir a consciência envolve pensar matematicamente. O professor informa aos estudantes as ferramentas culturais que são arbitrárias e, por definição, não implicam em raciocínio matemático. Eles, então, os convidam a usar suas consciências existentes para perceber e raciocinar sobre relações necessárias e sobre relações de relações para apropriar-se de ideias matemáticas novas por meio de sua interação discursiva. **Ferramentas epistêmicas.** Para aumentar a probabilidade de que o discurso dos interlocutores seja matematicamente produtivo, é útil que empreguem meios discursivos individuais e colaborativos para dar sentido a situações matemáticas. Para tanto, convidamos os interlocutores a empregar três ferramentas epistêmicas. Ou seja, questionar a si mesmos e a seus interlocutores o que eles percebem, como o percebido se conecta ao que já sabem e o que mais querem saber sobre isso. Especificamente, essas ferramentas são três perguntas em que os interlocutores explicitam ou implicitamente se engajam: (1) O que você observa? (2) O que isso significa para você? (3) O que você quer saber sobre? A primeira e a terceira perguntas vêm do trabalho *The Math form* (RAY, 2013). A segunda pergunta é aquela que acrescentamos (POWELL; ALQAHTANI, 2015).

O objetivo dessas questões é fomentar, dentro de pequenos grupos de interlocutores, discussões produtivas fundamentadas em sua atenção a conteúdos de experiência perceptíveis, não necessariamente visíveis, que podem ser descritos como objetos, relações entre objetos e dinâmicas que ligam diferentes relações. Usando as ferramentas epistêmicas, as respostas dos interlocutores se tornam públicas, relevantes e responsáveis. A ideia é que os interlocutores pratiquem conscientemente essas ferramentas epistêmicas para que, com o tempo, tornem-se hábitos matemáticos de suas mentes.

Antes de discutir a agência matemática do estudante, vale a pena resumir o que apresentamos até agora sobre tarefas matemáticas. Dada a nossa visão dialógica do que significa fazer matemática, as tarefas matemáticas devem engajar os aprendizes em interações discursivas. O objetivo das interações é dar suporte às suas relações variantes e invariantes entre objetos matemáticos. As tarefas devem conduzir os aprendizes a usar sua consciência para observar, entre os objetos matemáticos, o que é (logicamente) necessário sobre as relações e sobre as relações de relações entre os objetos. Para dar suporte ao trabalho dos aprendizes, as tarefas sugerem que eles empreguem três ferramentas epistêmicas para estruturar suas interações discursivas. Para empregar as ferramentas epistêmicas, os aprendizes exercitam sua agência. **Agência Matemática.** Agência é uma qualidade humana. A partir de uma perspectiva evolucionária, como Bandura (2006) observa, os seres humanos se tornaram uma espécie de agentes sensíveis, capazes, por meio da simbolização, de transcender os ditames de seu ambiente imediato e de moldar suas circunstâncias de vida e suas vidas. "Através da autorregulação cognitiva, os seres humanos podem criar futuros visualizados que atuam no presente; construir, avaliar e modificar cursos alternativos de ação para garantir resultados valiosos; e sobrepor-se às influências ambientais" (BANDURA, 2006, p. 164). Assim, a agência humana e a motivação individual podem se manifestar e prevalecer em oposição às forças maiores e contrabalançadas. A agência, embora expressa individualmente, é exercida dentro das práticas sociais. Como Holland *et al.* (2001, p. 279) afirmam: "A agência está nas improvisações que as pessoas criam em resposta a situações particulares".

A categoria de agência tem atraído atenção na Educação Matemática. É usada como uma ferramenta para localizar formas de comunicação na sala de aula de matemática (BOALER, 2003; BOALER; GREENO, 2000; GROOTENBOER; JORGENSEN [ZEVENBERGEN], 2009; GROOTENBOER; ZEVENBERGEN, 2007; WAGNER, 2007); para acessar letramentos específicos da disciplina e como oportunidade de participar legitimamente em práticas de sala de aula (GRESALFI; COBB, 2006); e, particularmente, com aprendizes sub-representados, para promover atividades, intenções e empoderamento de estudantes na comunicação matemática (MUELLER; YANKELEWITZ; MAHER, 2012; POWELL, 2004). De acordo com Grootenboer e Jorgensen (Zevenbergen) (2009, p. 262), localizamos a agência no ato de fazer matemática. Ela é evidente quando os aprendizes "recorrem a seus próprios entendimentos de [uma] situação e os utilizam para desenvolver entendimentos mais ricos que [são] fortemente matemáticos". Para o significado de "fazer matemática", adotamos a perspectiva dialógica que apresentamos anteriormente: tem-se matemática quando um interlocutor fala consigo mesmo ou com outros sobre objetos específicos percebidos, sobre relações entre os objetos e sobre dinâmicas envolvidas nessas relações ou nas relações de relações (GATTEGNO, 1987).

Incorporamos essa visão dialógica de fazer matemática e expandimos a noção de agência matemática de Powell (2004). Conceituamo-la como ideias matemáticas discursivas e inscritivas e formas de raciocínio evidenciadas a partir da iniciativa individual ou colaborativa dos aprendizes para definir ou redefinir e construir ou ir além das especificidades das situações matemáticas nas quais foram convidados a trabalhar. A agência matemática também é indicada como a manifestação externa, pelos aprendizes, de suas afirmações matemáticas válidas e criativas (orais, gestuais ou inscritivas), baseadas em relações entre objetos que eles organizam ou imaginam fisicamente. Essa conceitualização permite que instâncias de agência matemática sejam metodologicamente identificadas e descritas na atividade dos estudantes, à medida que se engajam com tarefas matemáticas.

A agência matemática é significativa para ampliar a participação na matemática. O modo como os estudantes se engajam com a matemática está indissoluvelmente ligado ao seu senso de afiliação à disciplina (GREENO; MIDDLE SCHOOL..., 1998; LAMPERT, 1990, 2001; LAVE; WENGER, 1991; NASIR, 2002). Aumentar a afiliação tem estreita relação com o aumento da motivação para aprender (COBB; HODGE, 2002), o que leva a um engajamento mais profundo e mais efetivo nas atividades de sala de aula (AMES; ARCHER, 1988). Os estudantes que evidenciarem a agência matemática afiliar-se-ão à matemática, terão motivação para aprender e engajar-se-ão na matemática escolar de forma profunda e efetiva – ingredientes necessários para uma participação bem-sucedida na matemática. Como Gresalfi e Cobb (2006, p. 51) observam,

> focar nas maneiras como os estudantes estão se engajando com a matemática e favorecer o desenvolvimento de um relacionamento ativo e empoderado com a disciplina é crucial na promoção de ideias positivas sobre o papel que a matemática pode desempenhar futuramente em suas vidas.

TAREFAS CONTRASTANTES

As tarefas podem posicionar os aprendizes como consumidores de informações matemáticas ou como produtores de ideias matemáticas. O segundo tipo de tarefas é empoderador, pois promove e dá suporte à agência matemática, convidando os aprendizes a observarem relações e a revelarem discursiva e inscritivamente o que veem. Os estudantes podem usar as ferramentas epistêmicas para tornar relevantes para si e para seus interlocutores as relações que percebem entre os objetos matemáticos. Contrastamos duas versões da "mesma" tarefa para ilustrar como uma delas promove a agência matemática dos aprendizes.

As Figuras 1 e 2 apresentam a "mesma" tarefa[1]. As tarefas são destinadas a pequenos grupos de aprendizes dos anos finais do ensino fundamental ou do ensino médio, para trabalharem juntos no ambiente de *GeoGebra* matemática dinâmica de aplicação computacional[2]. Cada proposta os engaja em um estudo de triângulos cujos vértices são os centros e os pontos de interseção de

1 Na ordem em que apresentamos aqui, essas duas tarefas foram escritas no mesmo grupo de pesquisa. A segunda tarefa, Tarefa B, foi escrita para reformular explicitamente a Tarefa A como uma que promoveria e apoiaria a agência matemática dos aprendizes.

2 Como um *freeware* não comercial, o *GeoGebra* é um aplicativo interativo de geometria, álgebra, estatística, cálculo e matemática 3D (<geogebra.org>). Destina-se ao ensino e à aprendizagem desde a escola primária até níveis universitários.

dois círculos, nos quais cada circunferência contém o centro do outro círculo. Leia e pense sobre as afirmações da Tarefa A na Figura 1 e da Tarefa B na Figura 2. O que você observa sobre cada afirmação? Qual é a sua reação emocional a cada afirmação da tarefa? Abaixo, discutimos cada afirmação da tarefa e depois as relacionamos com a agência matemática. No entanto, para formular sua opinião, reconhecer suas respostas emocionais e seguir nossa discussão, seria melhor se você lesse e pensasse primeiro sobre as Tarefas A e B.

Na Figura 1, a Tarefa A informa aos aprendizes os nomes e as definições dos diferentes tipos de triângulos e, em seguida, pergunta quais tipos de triângulos estão na figura em anexo. Quando a caixa de seleção "mostrar ou ocultar prova" é clicada, a tarefa informa como Euclides justificou que a construção dos lados do triângulo ABC implica que eles têm o mesmo comprimento e, portanto, que o triângulo é equilátero. A tarefa fornece informações adicionais sobre como Euclides construiu o triângulo ABC, de modo que seja logicamente necessário que seus lados sejam congruentes. A necessidade da relação de igualdade entre os lados se deve ao fato de Euclides ter projetado uma relação de dependência entre os segmentos de reta AB, AC e BC.

Figura 1: Tarefa A: Identificar triângulos na construção criada a partir dos centros e dos pontos de interseção de dois círculos; cada uma das circunferências contém o centro do outro círculo.

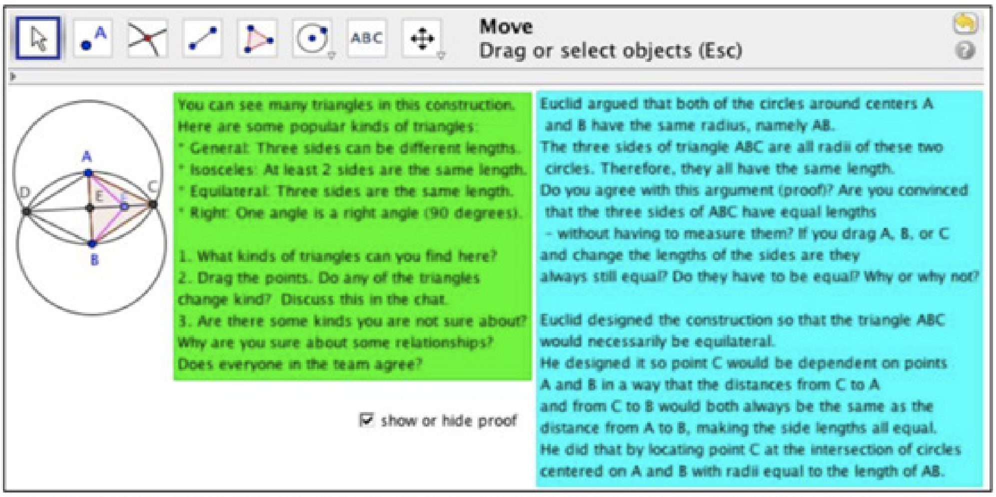


Figure 1: Task A, identifying triangles among a construction created from the centers and points of intersection of two circles each of whose circumference includes the center point of the other circle.

Você pode ver vários triângulos nessa construção.
Aqui estão alguns tipos de triângulos:
Escaleno: o comprimento dos três lados pode ser diferente.
Isósceles: Pelo menos dois lados têm o mesmo comprimento.
Equilátero: Os três lados têm o mesmo comprimento.
Retângulo: Um ângulo é reto (90 graus).

Quais tipos de triângulos você pode encontrar aqui?
Arraste os pontos. Algum dos triângulos se modificou? Discuta isso no chat.
Há alguns tipos sobre os quais você não está totalmente certo? Por que você tem

certeza sobre algumas relações? Alguém no grupo concorda?

Euclides argumentou que ambos os círculos com centros A e B têm o mesmo raio, a saber, AB.
Os três lados do triângulo ABC correspondem ao raio desses dois círculos. Portanto, todos têm o mesmo comprimento.
Você concorda com esse argumento (prova)? Você está convencido de que os três lados de ABC têm comprimentos iguais – sem precisar medi-los? Se você mover A, B ou C e mudar os comprimentos dos lados, eles ainda são sempre iguais? Eles precisam ser iguais? Por que ou por que não?

Euclides projetou a construção de modo que o triângulo ABC fosse necessariamente equilátero.
Ele a projetou para que o ponto C fosse dependente dos pontos A e B de maneira tal, que ambas as distâncias, de C a A e de C a B, fossem sempre iguais à distância de A a B, garantindo que os lados fossem iguais. Ele fez isso, localizando o ponto C na interseção dos círculos centrados em A e B, com raio igual ao comprimento de AB.

Como na Tarefa A, a Tarefa B na Figura 2 apresenta a mesma figura em anexo. Na parte superior, há uma caixa de seleção que permite aos aprendizes mostrar ou ocultar a caixa de texto abaixo dela. Na primeira caixa de texto, a Tarefa B pede aos aprendizes que explorem a figura dada, arrastando e falando sobre as relações que percebem entre os objetos. Em seguida, apresenta perguntas para orientar a discussão dos aprendizes. A Tarefa B foi projetada de modo a permitir que os aprendizes ocultem a caixa de texto de instruções, para liberar espaço para explorar a figura dada. Abaixo da primeira caixa de texto de instruções, os aprendizes podem desvelar uma caixa de texto de dicas, com perguntas adicionais para fundamentar as discussões dos aprendizes.

Figura 2: Tarefa B: identificar triângulos na construção criada a partir dos centros e dos pontos de interseção de dois círculos; cada uma das circunferências contém o centro do outro círculo.

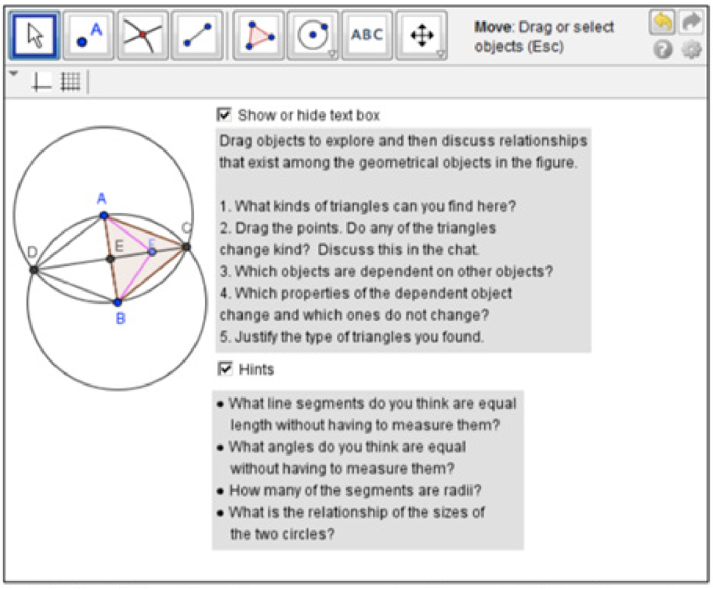


Figure 2: Task B, identifying triangles among a construction created from the centers and points of intersection of two circles each of whose circumference includes the center point of the other circle.

Arraste os objetos para explorar e depois discuta sobre as relações existentes no objeto geométrico desta figura.
Que tipos de triângulos você encontrou aqui?
Arraste os pontos. Algum triângulo mudou de tipo? Discuta isso no chat.
Quais objetos são dependentes de outros?
Quais propriedades do objeto dependente mudam e quais não mudam?
Justifique o tipo de triângulo que você encontrou.

Dicas
Quais segmentos você acha que têm medidas iguais, sem que seja preciso medi-los?
Quais ângulos você acha que têm medidas iguais, sem que seja preciso medi-los?
Quantos segmentos correspondem ao raio?
Qual é a relação entre o tamanho dos dois círculos?

As tarefas A e B têm algumas semelhanças essenciais. Além de apresentarem a mesma construção geométrica, ambas pedem aos aprendizes que identifiquem os triângulos na figura e observem as alterações enquanto seus elementos são arrastados. De fato, arrastar é um recurso fundamental dos aplicativos de computação dinâmica em matemática. As duas tarefas também empregam o uso de caixas de seleção para mostrar e ocultar caixas de texto. Essas são as semelhanças essenciais entre as duas tarefas.

Apesar dessas semelhanças, as duas tarefas são fundamentalmente diferentes no que diz respeito à promoção e ao suporte da agência. A tarefa A instrui os aprendizes a arrastar objetos específicos – pontos – e, em última análise, o que devem concluir. Dessa forma, é possível que os aprendizes “façam” a tarefa sem ter que tomar decisões e observar por si mesmos as mudanças na figura enquanto arrastam seus pontos geométricos. A tarefa apresenta-lhes um resultado significativo e justifica por que é verdadeiro. Além disso, a discussão da Tarefa A sobre como Euclides projetou as relações de dependência em sua construção pode convencer os aprendizes de que apenas certos indivíduos podem genuinamente fazer matemática.

Em contraste com a Tarefa A, a Tarefa B promove nos aprendizes o exercício de sua agência matemática. Em vez de dizer quais objetos específicos devem ser arrastados, a Tarefa B simplesmente instrui os aprendizes a arrastar objetos. Ou seja, os aprendizes devem decidir quais objetos devem ser arrastados: pontos, segmentos de reta ou circunferências. Proporcionar pontos de decisão faz parte da agência que a Tarefa B promove. A decisão é crucial, pois nem todos os objetos são arrastáveis. Objetos diferentes na construção têm diferentes graus de liberdade; alguns são independentes e outros são dependentes; alguns são arrastáveis e outros mudam de posição apenas em relação direta com a posição de outros objetos. Entender essas relações faz parte do aprendizado que a Tarefa B promove.

Para contrastar ainda mais as Tarefas A e B, enfatizamos o uso de caixas de seleção para mostrar ou ocultar caixas de texto. A primeira caixa de texto contém as instruções e a segunda, dicas. Na Tarefa A, as instruções não podem ser ocultas, porém na Tarefa B isso é possível e permite que os aprendizes tenham mais espaço para explorar a figura dada. Na Tarefa A, a caixa de texto das instruções contém informações que os aprendizes devem saber ou aprender antes de interagir com a figura dada. Em contraste, com base no que eles coletivamente já sabem, a Tarefa B pede que explorem a figura e discutam sobre o que observam. Além da caixa de texto de instruções, a Tarefa A usa uma caixa de texto auxiliar para fornecer mais informações. Em vez disso, a Tarefa B usa uma caixa de texto extra para propor dicas, que, entretanto, não são "dicas de resposta" ou provas, como na Tarefa A, mas sugerem perguntas adicionais, que podem fundamentar as discussões dos aprendizes e são projetadas para apoiar seu engajamento continuado com a tarefa e, implicitamente, convidá-los a usar suas ferramentas epistêmicas à medida que, juntos, considerem outras questões relacionadas à tarefa principal.

Em geral, vemos que as dicas têm um papel específico em tarefas que promovem e dão suporte à agência matemática dos aprendizes. Como indicam Powell e Alqahtani (2015), sem declarar explicitamente quais observações os aprendizes devem fazer no contexto das tarefas do *GeoGebra*, as dicas devem apresentar sugestões ou novos desafios que os levem a observar determinados objetos, atributos ou relações. Cada dica tem uma ou mais destas três características: sugerem (a) questões para discutir, (b) objetos ou comportamentos a serem observados e (c) ferramentas do *GeoGebra* a serem usadas para explorar relações, particularmente de dependência.

TAREFAS PARA AGÊNCIA MATEMÁTICA: OUTROS EXEMPLOS

O modelo instrucional 4A. Para continuar com uma ilustração de tarefas que promovem e dão suporte à agência matemática dos aprendizes, recorremos a exemplos matemáticos do início do ensino fundamental. Como um veículo de instrução para promover a agência matemática nos estudantes, Powell (2018) apresenta o que ele chama de Modelo Instrucional 4A. Um objetivo essencial desse modelo é sugerir uma estrutura para sequências de tarefas que promovam e deem suporte à agência matemática dos aprendizes. No nome do modelo, o rótulo "4A" refere-se às suas quatro diferentes fases de "***a***ções" físicas e mentais: Ações Reais, Ações Virtuais, Ações Escritas e Ações Formalizadas. Na primeira fase, Ações Reais, os estudantes trabalham em pequenos grupos para interagir com materiais manipulativos, tais como barras Cuisenaire (Veja Figura 3).

O engenhoso inventor das barras, Emile-Georges Cuisenaire (1891-1975), professor de escola belga, atribuiu-lhes correspondências funcionais e curiosas entre cor e comprimento. Barras de mesma cor têm o mesmo comprimento e, inversamente, barras de mesmo comprimento têm a mesma cor. Um comprimento que é o dobro do outro também tem a tonalidade mais escura. A menor barra é uma cor neutra, geralmente chamada de "branca". Barras com comprimento equivalente a duas, quatro e oito barras brancas têm pigmentos com afinidade com a família vermelha (roxo e marrom). Barras com comprimento igual a 3, 6 e 9 barras brancas são coloridas, respectivamente, com verde, verde escuro e azul, enquanto barras equivalentes a 5 e 10 barras brancas são amarelas e alaranjadas. A barra cujo comprimento tem a distinção de ser primo entre todas as barras de outros comprimentos no conjunto tem a cor preta. Curiosamente, as duas cores primárias, vermelho e amarelo, misturam-se, formando a laranja, o que se assemelha ao fato de que os dois fatores primos da barra laranja (10 barras brancas) são a barra vermelha (2 barras brancas) e a barra amarela (5 barras brancas).

Figura 3: Barras de Cuisenaire, dez tamanhos e cores diferentes, organizados em forma de "escada"

Figure 3. Cuisenaire rods, ten different sizes and colors, arranged in a "staircase" formation.

Na fase de Ações Reais do modelo, os estudantes usam uma linguagem combinada, informal e formal, para descrever suas ações com os objetos manipuláveis e suas percepções sobre eles. Usando o termo de Hewitt (1999), a linguagem formal é um conhecimento arbitrário e, portanto, é dada apropriadamente aos estudantes. Diferentemente, colocar quatro barras vermelhas justapostas pelo comprimento e observar que o comprimento é equivalente a uma barra marrom é um conhecimento de que os estudantes se tornam conscientes. Da mesma forma, se possuírem a linguagem arbitrária, os estudantes poderão dizer que o comprimento de três barras vermelhas é equivalente a três quartos do comprimento de uma barra marrom. Durante essa fase, os estudantes podem descrever suas observações e ações como um exercício de sua agência matemática. Empregando sua agência com ações sobre as barras, eles podem validar seu trabalho e o trabalho de outros, sem buscar o julgamento de autoridade de seu professor nem depender dele.

Depois de alcançar a habilidade com tais combinações de barras e afirmações correspondentes, os estudantes estão prontos para a próxima fase, Ações Virtuais. Nessa fase, trabalham sem manipular as barras e fazem afirmações orais como na fase anterior. Essa fase é essencial, pois incentiva e dá suporte aos estudantes para usarem suas imagens mentais das configurações das barras de Cuisenaire para desenvolver estratégias visuoespacial e substituir as Ações Reais por ações executadas em suas mentes. Alcançar a facilidade nesta fase de Ações Virtuais é elemento fundamental para as duas próximas fases, Ações Escritas e Ações Formalizadas. Sem essa habilidade, a construção sustentável, por exemplo, da fase de Ações Escritas ficaria comprometida e, ao invés de compreensão relacional, os estudantes inevitavelmente precisariam empregar mecanismos de memória e procedimentais.

Em seguida, na fase de Ação Escrita, dependendo do que declararam oralmente na fase anterior, deve-se mostrar aos estudantes como escrever suas afirmações simbolicamente. As representações simbólicas utilizadas na matemática são conhecimentos histórico-culturais arbitrários, e, portanto, devem ser adequadamente apresentadas aos estudantes. Por exemplo, se um estudante afirmou que nove terços de 12 é maior do que dez nonos de 18, deve-se mostrar ao grupo de estudantes a representação simbólica de sua declaração: 9/3 x 12 > 10/9 x 18. Depois disso, eles serão convidados a escrever suas próprias declarações, como 1/2 (4/5 x 15) = 3/4 (8/3 x 3). Tais afirmações, quando escritas por estudantes com base em relações entre objetos que eles combinam ou imaginam, fornecem evidências de suas agências matemáticas.

Finalmente, na última fase, Ação Formalizada, os estudantes discutem e simbolizam variantes, invariantes e generalizações que observaram. Por exemplo, eles podem ter observado que certas medidas da mesma quantidade são equivalentes à mesma quantidade, como ocorre nestas medidas: $\frac{1}{2}X, \frac{2}{4}X, \frac{3}{6}X, \frac{4}{8}X$, e assim por diante. Essa observação será formalmente descrita como uma família de medidas equivalentes. As Ações Formalizadas incorporarão o senso de número fracionário dos estudantes. As perspectivas epistemológica e pedagógica encenadas através da aplicação do Modelo Instrucional 4A fornecem bases para a compreensão teórica dos meios e da organização, para dar suporte à aprendizagem de frações como medidas e às ideias sobre magnitude, ordem e equivalência de tais frações. As quatro fases se relacionam entre si. A fase de Ações Reais serve como base para as outras fases, em que os estudantes podem sempre se referir às manipulações físicas das barras para revisar ou verificar seu trabalho.

Frações *de* Quantidade. Na subseção anterior, apresentamos as fases do Modelo Instrucional 4A. O que segue é um exemplo do uso do modelo para estruturar uma sequência de tarefas que promovam e deem suporte à agência do estudante. O tópico matemático envolve uma abordagem para aprender sobre frações e famílias de frações equivalentes. Baseamos a abordagem no que chamamos de perspectiva de medida (POWELL, 2018). Ela compreende as frações como historicamente emergentes da prática social de medir e define uma fração como uma relação comparativa multiplicativa do mesmo atributo extenso de duas quantificações que têm a mesma unidade. O atributo pode ser comprimento, área, volume, massa, peso ou a contagem de um conjunto discreto contável. Na sequência de 18 tarefas descritas a seguir, o atributo é o comprimento. Por isso, as sequências de tarefas empregam as barras de Cuisenaire, uma vez que, convenientemente, permitem o foco no comprimento.

FRAÇÕES COMO RELAÇÕES ENTRE DUAS GRANDEZAS (COMPRIMENTOS) COM A MESMA UNIDADE E CONSTRUÇÃO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES

Esta sequência de tarefas tem dois objetivos:

1. Criar uma linguagem para descrever uma relação comparativa entre duas grandezas (comprimentos ou barras), uma fração. Será a relação obtida ao medir o comprimento de uma barra com o comprimento de outra. Em outras palavras, uma fração é um número que representa a relação comparativa do comprimento de uma barra com o comprimento de outra.

2. Engajar as ideias de que (a) diferentes pares de grandezas podem ter o mesmo nome fracionário, (b) a mesma relação entre duas grandezas pode ser expressa com diferentes nomes fracionários, e (c) se diferentes nomes fracionários se referirem à mesma relação entre duas grandezas, então os nomes são equivalentes.

***Fase Ação Real*: Trabalhando com barras de Cuisenaire**

Tarefa 1. Encontrar pares de barras cuja relação entre seus comprimentos seja uma fração específica.

a. Que par de barras você pode escolher, a fim de que o comprimento de uma barra seja um quarto do comprimento da outra? Qual barra é a barra de medição? Nós a chamamos de barra unidade. Qual barra está sendo medida?

b. Que par de barras você pode escolher, de modo que o comprimento de uma barra seja dois quintos do comprimento da outra? Qual barra é a barra unidade ou a barra de medição? Qual barra está sendo medida?

c. Que par de comprimentos você pode escolher, para que um comprimento seja um sexto do outro comprimento? Qual barra é a barra unidade? Qual barra é a barra de medição? Qual barra está sendo medida?

Tarefa 2. Encontrar pares de barras cuja relação entre seus comprimentos seja uma fração específica.

Quando queremos enfatizar o comprimento de uma única barra ou uma linha de duas ou mais barras colocadas de ponta a ponta, chamamos a barra ou a linha de barras de um trem.

Pegue uma barra vermelha e uma barra marrom e coloque-as lado a lado. O que podemos dizer sobre a relação entre os comprimentos desse par de barras? Como um trem de quatro barras vermelhas equivale ao comprimento de uma barra marrom, podemos ver que o comprimento de uma barra vermelha é um quarto do comprimento de uma barra marrom ou, abreviadamente, podemos dizer: “vermelho é um quarto de marrom”.

a. Encontre outros pares de barras ou trens de barras, em que um é um quarto do comprimento do outro. Quantos você pode encontrar?

b. Veja todos os pares de comprimentos encontrados. O que você observa sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

c. O que você *observa* sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

d. O que suas *observações significam para você?*

e. O que você pensa sobre isso? Você tem alguma dúvida sobre algum aspecto do que fez até agora?

Tarefa 3. Encontrar pares de comprimentos em que um é dois terços do comprimento do outro.

a. Encontre outros pares de comprimentos em que um é dois terços do comprimento do outro.

b. Veja todos os pares de comprimentos encontrados. O que você observa sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

Na Tarefa 1, para pares de comprimentos em que o primeiro é um quarto do comprimento do segundo comprimento, você pode ter descoberto que, além do par um vermelho e um marrom, você tem estes quatro pares: (1) duas barras vermelhas e duas barras marrons, (2) uma barra branca e uma barra roxa, (3) duas barras brancas e duas barras roxas e (4) uma barra verde e um trem de uma barra laranja e uma barra vermelha.

Existe um par de barras para o qual, usando apenas barras dessas duas cores, você pode fazer o comprimento dos outros pares?

Podemos observar que duas barras brancas e duas barras roxas dão o mesmo comprimento de uma barra vermelha e uma barra marrom. É verdade que barras brancas e barras vermelhas podem ser usadas para criar o comprimento de duas barras vermelhas e duas barras marrons? E para o par com uma barra verde e um trem de uma barra laranja e uma barra vermelha?

c. Agora, considere os pares de comprimentos que você encontrou em que um é dois terços do comprimento do outro. Existe um par de barras para o qual, usando apenas barras dessas duas cores, você pode fazer o comprimento dos outros pares? Qual é o par?

d. O que você observa sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

e. O que suas observações significam para você?

f. O que você pensa sobre isso? Você tem alguma dúvida sobre algum aspecto do que fez até agora?

Tarefa 4. Encontrar pares de comprimento em que um é três meios do comprimento do outro.

a. Encontre pares de comprimento em que um é três meios do comprimento do outro.

b. Veja todos os pares de comprimentos encontrados. O que você observa sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

c. Existe um par de barras para o qual, usando apenas barras dessas duas cores, você pode fazer os comprimentos dos outros pares? Qual é o par?

d. O que você observa sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

e. O que suas observações significam para você?

f. O que você pensa sobre isso? Você tem alguma dúvida sobre algum aspecto do que fez até agora?

Tarefa 5. Encontrar pares de comprimento em que um é cinco terços do comprimento do outro.

a. Encontre pares de comprimentos em que um é cinco terços do comprimento do outro.

b. Veja todos os pares de comprimentos encontrados. O que você observa sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

c. Existe um par de barras para o qual, usando apenas barras dessas duas cores, você pode fazer os comprimentos dos outros pares? Qual é o par?

d. O que você observa sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

e. O que suas observações significam para você?

f. O que você pensa sobre isso? Você tem alguma dúvida sobre algum aspecto do que fez até agora?

Tarefa 6. Encontrar pares de comprimentos em que um é três e um quinto do comprimento do outro.

a. Encontre pares de comprimentos em que um é três e um quinto do comprimento do outro.

b. Veja todos os pares de comprimentos encontrados. O que você observa sobre eles?

Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

c. Existe um par de barras para o qual, usando apenas barras dessas duas cores, você pode fazer os comprimentos dos outros pares? Qual é o par?

d. O que você observa sobre eles? Quais são as semelhanças e as diferenças entre os pares de comprimentos?

e. O que suas observações significam para você?

f. O que você pensa sobre isso? Você tem alguma dúvida sobre algum aspecto do que fez até agora?

Tarefa 7. Crie seu próprio problema para encontrar pares de comprimentos em que o comprimento de um é uma certa fração do comprimento do outro.

Tarefa 8. Dado um par de comprimentos de barras em que uma é dois quintos do comprimento da outra, escreva sobre como você encontraria outros pares de comprimentos de barras que tivessem essa mesma relação fracionária.

Tarefa 9. Qual barra você pode escolher como barra unidade para encontrar duas barras em que uma é metade da barra unidade e a outra é um terço da barra unidade?

Tarefa 10. Qual comprimento você pode escolher como comprimento unidade para encontrar três barras em que uma é metade do comprimento da unidade, a segunda é um terço do comprimento da unidade e a terceira é um quarto do comprimento da unidade?

***Fase Ações Virtuais*: Trabalhando oralmente e sem as barras de Cuisenaire**

Tarefa 11. Sem manipular fisicamente as barras de Cuisenaire, descreva um par de barras em que uma é dois sétimos do comprimento da outra. Como você usaria seu par para criar outros pares de trens de barras em que um trem é dois sétimos do comprimento do outro?

Tarefa 12. Sem manipular fisicamente as barras de Cuisenaire, descreva um par de barras em que uma é três quartos da outra. Como você usaria seu par para criar outros pares de trens de barras em que um trem é três quartos do outro?

Tarefa 13. Sem manipular fisicamente as barras de Cuisenaire, descreva um par de barras em que uma é quatro e um sexto da outra. Como você usaria seu par para criar outros pares de trens de barras em que um trem é quatro e um sexto do outro?

Tarefa 14. Sem manipular fisicamente as barras de Cuisenaire, descreva um par de comprimentos em que o comprimento de um é uma certa fração do comprimento do outro. Como você usaria o seu par de comprimentos para criar outros pares de comprimentos de barras que tivessem a mesma relação fracionária?

Tarefa 15. Dado um par de comprimentos de barras em que uma é sete quartos do comprimento da outra, escreva sobre como você encontraria outros pares de comprimentos de barras que tivessem a mesma relação fracionária.

***Fase Ações Escritas*: Trabalhando simbolicamente no papel**

Tarefa 16. A fração de três quartos é escrita assim: $\frac{3}{4}$. Com base em suas descobertas da Tarefa 8, escreva várias frações que sejam equivalentes a $\frac{3}{4}$.

Tarefa 17. Escreva várias frações equivalentes a cada uma das seguintes:

a. $\frac{2}{5}$

b. $\frac{2}{7}$

c. $\frac{4}{9}$

d. $\frac{5}{11}$

e. Crie seus próprios problemas.

***Fase Ações-Formalizadas*: A partir das três fases anteriores, formalizando ações matemáticas simbolicamente ou como uma definição**

Tarefa 18. Nesta tarefa, você desenvolverá formalmente uma notação para indicar frações equivalentes e uma família de frações equivalentes.

a. Usando uma barra verde e uma barra amarela, crie uma relação em que o comprimento de uma barra seja três quintos do comprimento da outra barra.

b. Usando apenas barras verdes e amarelas, encontre, pelo menos, três outros pares de comprimentos de barras que tenham a relação fracionária de três quintos.

c. No item (b), você provavelmente construiu uma sequência de quatro pares de comprimentos de barras que são equivalentes à relação fracionária três quintos $\left(\frac{3}{5}\right)$, que estão simbolicamente listados aqui:

$$\frac{1\times g}{1\times y}=\frac{2\times g}{2\times y}=\frac{3\times g}{3\times y}=\frac{4\times g}{4\times y}=\cdots$$

e numericamente:

$$\frac{1\times 3}{1\times 5}=\frac{2\times 3}{2\times 5}=\frac{3\times 3}{3\times 5}=\frac{4\times 3}{4\times 5}=\cdots$$

Qual é a 7ª fração da sequência?

d. Em uma sequência de frações equivalentes a $\frac{4}{7}$, qual é a 5ª fração equivalente? E a 10ª? E a 25ª?

e. Encontre a 4ª fração equivalente a $\frac{a}{b}$. Qual é a 10ª? E a 25ª?

f. Qual é a n-ésima fração equivalente a $\frac{a}{b}$?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência de tarefas aqui exposta apresenta uma abordagem para o ensino e a aprendizagem de frações e famílias de frações equivalentes. Estruturamos a sequência no contexto do Modelo Instrucional 4A. Usando um conjunto específico de materiais manipulativos que incorpora a eles números racionais e operações, as fases do modelo são projetadas para promover e dar suporte a estudantes no exercício de sua agência matemática. As tarefas focam a atenção dos estudantes nas relações entre os objetos, entre as barras de Cuisenaire estruturadas para exemplificar comparações multiplicativas entre os comprimentos das barras. As tarefas incorporam as ideias conceituais apresentadas, no início deste capítulo, sobre o que significa fazer matemática; a distinção entre conhecimento matemático arbitrário e necessário; e o uso de ferramentas epistêmicas para gerar discussões entre os estudantes sobre o que é logicamente necessário nas configurações manipuladas de barras. A partir dessa consciência, os estudantes criam afirmações matemáticas originais orais e eventuais escritas, evidenciando sua agência matemática e seu empoderamento.

REFERÊNCIAS

AMES, C.; ARCHER, J. Achievement goals in the classroom: Students' learning strategies and motivation processes. *Journal of Educational Psychology,* Washington, D.C., v. 80, n. 3, p. 260-267, 1988.

BANDURA, A. Toward a psychology of human agency. *Perspectives on Psychological Science,* Thousand Oaks, v. 1, n. 2, p. 164-180, 2006.

BOALER, J. Studying and capturing the complexity of practice. The case of "Dance of Agency". *In*: PATEMAN, N. A.; DOUGHERTY, B. J.; J. T. ZILLIOX (ed.). *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*. Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai'i, 2003. v. 1, p. 3-16.

BOALER, J.; GREENO, J. G. Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. *In:* BOALER, J. (ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. Westport: Ablex, 2000. p. 171-200.

COBB, P.; HODGE, L. L. A relational perspective on issues of cultural diversity and equity as they play out in the mathematics classroom. *Mathematical Thinking and Learning,* Abingdon, v. 4, n. 2-3, p. 249-284, 2002.

GATTEGNO, C. *The science of education: Part 1: Theoretical considerations*. New York: Educational Solutions, 1987.
GREENO, J. G.; MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS THROUGH APPLICATIONS PROJECT GROUP. The situativity of knowing, learning, and research. *American Psychologist,* Washington, DC, v. 53, n. 1, p. 5-26, 1998.

GRESALFI, M. S.; COBB, P. Cultivating students' discipline-specific dispositions as a critical goal for Pedagogy and equity. *Pedagogies: An International Journal,* Abingdon, v.1, n.1, p. 49-57, 2006. doi:10.1207/s15544818ped0101_8

GROOTENBOER, P.; JORGENSEN (ZEVENBERGEN), R. Towards a theory of identity and agency in coming to learn mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* London, v. 5, n. 3, p. 255-266, 2009.

GROOTENBOER, P.; ZEVENBERGEN, R. Identity and mathematics: Towards a theory of agency in coming to learn mathematics. *In:* WATSO, J.; BESWICK, K. (ed.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Hobart, 2007. p. 335-343.

HEWITT, D. Arbitrary and necessary: Part 1 A way of viewing the mathematics curriculum. *For the Learning of Mathematics,* New Westminster, v.19, n. 3, p. 2-9, 1999.

HOLLAND, D. *et al*. *Identity and agency in cultural worlds*. Cambridge: Harvard, 2001.

LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal,* Thoursand Oaks, v. 27, n. 1, p. 29-63, 1990.

LAMPERT, M. *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University, 2001.

LAVE, J.; WENGER, E. *Situated learning:* Legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University, 1991.

MUELLER, M.; YANKELEWITZ, D.; MAHER, C. A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 80, n. 3, p. 369-387, 2012. doi:10.1007/s10649-011-9354-x

NASIR, N. S. Identity, goals, and learning: Mathematics in cultural practice. *Mathematical Thinking and Learning,* Abingdon, v. 4, n. 2-3, p. 213-247, 2002.

POWELL, A. B. The diversity backlash and the mathematical agency of students of color. *In*: HØINES, M. J.; FUGLESTAD, A. B. (ed.). *Proceedings of the twenty-eighth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Bergen, Norway: Bergen University College, 2004. v. 1, p. 37-54.

POWELL, A. B. (2018). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Revista Perspectiva*, Florianópolis, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018.

POWELL, A. B.; ALQAHTANI, M. M. Tasks and meta-tasks to promote productive mathematical discourse in collaborative digital environments. *In*: SAHIN, I.; KIRAY, S. A.; ALAN, S. (ed.). *Proceedings of the International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology*. Antalya, Turkey, 2015. p. 84-94.

RAY, M. Noticing and wondering. *Powerful problem solving:* Activities for sense making with the mathematical practices. Portsmouth, NH: Heinemann, 2013. p. 42-55.

SCHMITTAU, J. Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education,* Heidelberg, v. 19, n. 1, p. 19-43, 2004.

SIERPINSKA, A. Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the Learning of Mathematics,* New Westminster, v. 24, n. 2, p. 7-15, 2004.

SIMON, M. A.; TZUR, R.; HEINZ, K. Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of Reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education,* Reston, v. 35, n. 5, p. 305-329, 2004.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching,* Derby, n. 77, p. 20-26, 1976.

SKEMP, R. R. *The psychology of learning mathematics* (Expanded American ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987.

WAGNER, D. Students' critical awareness of voice and agency in mathematics classroom discourse. *Mathematical Thinking and Learning,* Abingdon, v. 9, n. 1, p. 31-60, 2007.

ZEVENBERGEN, R. The construction of a mathematical habitus: implications of ability grouping in the middle years. *Journal of Curriculum Studies,* Abingdon, v. 37, n. 5, p. 607-619, 2005.

COLETIVO DE TRABALHO COMO RECURSO PARA A ATIVIDADE INDIVIDUAL

Daniela Dias dos Anjos
Rosangela Eliana Bertoldo Frare

Este capítulo tem como foco o trabalho coletivo construído no contexto do grupo colaborativo enquanto recurso para a atividade docente individual. As narrativas produzidas pelos professores e seus dizeres nas reuniões do grupo revelam o quanto eles aprendem uns com os outros: assistindo aos vídeos dos colegas, analisando conjuntamente as tarefas realizadas e (re)elaborando o trabalho. O presente texto enfoca este movimento coletivo, analisando as falas das professoras registradas nas audiogravações e as suas narrativas, quando estas se referem ao papel do grupo no desenvolvimento de sua atividade docente. A discussão aqui apresentada toma como base a perspectiva histórico-cultural, mais especificamente os estudos de Yves Clot sobre o papel do coletivo de trabalho na atividade individual.

Introdução

Temos vivenciado uma precarização e intensificação da atividade docente (OLIVEIRA, 2004), que caminha na contramão da criação de espaços coletivos tais como o Grupo Colaborativo de Matemática (Grucomat). São poucos os professores que conseguem pensar o trabalho de modo colaborativo. E, muitas vezes, quando tentam propor algum trabalho dessa natureza, eles não conseguem a adesão dos seus pares. Ou a própria escola (direção, coordenação) não incentiva a realização desse tipo de trabalho. Nas escolas, as reuniões pedagógicas, fruto de lutas dos trabalhadores da educação, na maior parte dos casos, configuram-se como espaços burocráticos para dar recados, nos quais pouco se reflete ou estuda sobre o trabalho cotidiano. Desse modo, lidar com os dilemas de sua profissão vai ficando a cargo de cada professor, individualmente. A responsabilidade, que deveria ser coletiva e compartilhada, tende a ser individual e solitária, o que tem aumentado a precarização das condições de trabalho e gerado sofrimento para os docentes, que adoecem cada vez em função da atual organização do trabalho nas escolas. Muitos professores encontram-se cansados das cobranças e desgostosos com a docência. Nesse cenário, tendem a achar que fazer diferente lhes vai ser muito trabalhoso, vai intensificar ainda mais o seu trabalho e, por isso, não aderem a novas ideias, não compartilham suas práticas e não acreditam no trabalho colaborativo como uma possibilidade para melhorar a situação atual.

O Grucomat, indo na contramão das atuais políticas educacionais, que têm aprofundado a individualização e a competição entre os professores (FREITAS, 2012), configura-se num espaço-tempo privilegiado. Neste grupo, as professoras têm a oportunidade de planejar e replanejar o trabalho, de conhecer as práticas de outras professoras, de analisar crítica e conjuntamente o trabalho realizado, bem como de estudar textos teóricos.

Participam do grupo dezesseis pessoas, entre pesquisadores da universidade, professores da Educação Infantil ao Ensino Médio, coordenadoras pedagógicas e diretoras de escola. Tal heterogeneidade torna as discussões muito ricas, pois desse modo se torna possível pensar o ensino da matemática ao longo de todo o processo de escolarização.

Este texto objetiva olhar para o movimento do trabalho coletivo realizado no Grucomat e avaliar o impacto que tem sobre a ação individual das professoras participantes. A análise deste movimento será realizada a partir da contribuição dos estudos de Yves Clot na Clínica da Atividade, que se insere na perspectiva histórico-cultural de Vigotski.

Apresentamos num primeiro momento, as contribuições de Yves Clot para a reflexão sobre o coletivo de trabalho; e em seguida, as análises de trechos das narrativas e reuniões do grupo, nas quais podemos perceber a importância do coletivo para a atividade individual.

Coletivo de Trabalho e Atividade Individual

Yves Clot é um psicólogo do trabalho que tem dedicado seus estudos à análise da atividade profissional. Clot faz uso das elaborações de Vigotski para pensar a relação dos sujeitos com seu trabalho, com o mundo que os cerca, o quanto tais relações constituem o sujeito e a própria atividade profissional. Para Clot, a elaboração de Vigotski de que o indivíduo singular é um ser social assume fundamental importância.

Nesse sentido, Clot considera o coletivo como um instrumento de trabalho indispensável, não como um grupo de pessoas que pensam do mesmo modo, mas como um grupo que discute/debate sobre as questões do ofício, que discute os critérios de qualidade do trabalho. O que caracteriza um coletivo saudável é justamente a possibilidade da controvérsia.

> [...] na clínica do trabalho a questão do coletivo é o problema central. Não é o coletivo como grupo, mas o coletivo como recurso para o desenvolvimento da subjetividade individual; é o coletivo no indivíduo que nos interessa. Por isso Vigotski é tão importante. Vigotski apresenta a idéia de que o social não é simplesmente uma coleção de indivíduos, não é simplesmente o encontro de pessoas; o social está em nós, no corpo, no pensamento; de certa maneira, é um recurso muito importante para o desenvolvimento da subjetividade. Nesse sentido, o coletivo não é uma coleção, é o contrário da coleção. O coletivo, nesse sentido, é entendido como recurso para o desenvolvimento individual. É isso o que interessa

> à clínica da atividade. Há uma dimensão coletiva e subjetiva. (CLOT, 2006, p. 102)

Nessa perspectiva, o próprio ser humano é um ser histórico, que se constituiu no entrelaçamento entre uma história social, mais abrangente, e uma história pessoal, singular.

> A palavra história [...] para mim significa duas coisas: 1) abordagem geral das coisas – neste sentido qualquer coisa tem sua história, neste sentido Marx: uma ciência – a história [...], ciências naturais = história da natureza, história natural; 2) história no próprio sentido, isto é a história do homem. Primeira história = materialismo dialético, a segunda – materialismo histórico [...]. (VIGOTSKI, 2000, p. 23)

A história social não está desvinculada da história pessoal, uma não existe sem a outra. Se existe uma história pessoal é porque existe uma história mais abrangente, coletiva. "A história pessoal (desenvolvimento cultural), sem deixar de ser obra da pessoa singular, faz parte da história humana." (PINO, 2000, p. 51). Tal perspectiva não desconsidera a subjetividade e a singularidade do homem. Ao trazer a questão semiótica, Vigotski ressalta o papel singular dos sujeitos.

Ao transportarmos essa ideia para pensar o coletivo dos profissionais da educação, pensamos rapidamente na dificuldade de um efetivo trabalho coletivo na escola. Vemos coletivos enfraquecidos e uma lógica capitalista, que incentiva cada vez mais as disputas entre professores e escolas (FREITAS, 2012; DALBEN, 2012). De acordo com Roger (2007, p. 31),

> [...] a atrofia atual da dimensão transpessoal e a carência de recursos genéricos permitindo fazer frente às obrigações do trabalho a realizar pode se traduzir como uma desregulagem das dimensões interpessoais do *métier*. Os conflitos profissionais podem então se transformar em pessoais intrapsíquicos sem soluções. Do mesmo modo, quando, por falta do coletivo, a dimensão pessoal do *métier* e sua dimensão impessoal se confundem, o trabalho torna-se difícil, custoso, por vezes insuportável.

A atividade docente não é uma atividade técnica e, portanto, há uma dificuldade em definir seus critérios de qualidade, em definir o que seria um trabalho bem feito. Em atividades profissionais como esta, o coletivo é ainda mais importante, pois é ele que deve definir tais critérios. No entanto, o coletivo de trabalho dos professores, em geral, parece estar "doente", não consegue dialogar e desenvolver controvérsias; cada um vive sozinho os dilemas do *métier* (ANJOS, 2013; SMOLKA, 2012). Clot (2010, p. 119, grifo do autor) aponta que, se não é possível recorrer às "formas comuns da vida profissional, assiste-se a um desregramento da ação individual, a uma 'queda' do poder de ação, assim como da tensão vital do coletivo, a uma perda de eficácia do trabalho e da própria organização".

Ao comentar sobre trabalho realizado com professores, Clot (2007) afirma que a discussão coletiva sobre o trabalho não elimina os conflitos de critérios sobre o real do trabalho; ela os revitaliza. E considera que é assim que se pode se encontrar o sentimento de viver a mesma história, algo muito importante nos meios profissionais em geral, sobretudo no trabalho docente. A análise do trabalho feita pelos próprios trabalhadores renova a energia psíquica potencial suscetível de tornar novamente o trabalho defensável aos olhos daqueles que o fazem.

A metodologia em clínica da atividade (CLOT, 2010) se desenvolveu justamente com a perspectiva de tornar-se um dispositivo metodológico que contribua para o fortalecimento dos coletivos de trabalho. Objetiva levar os próprios trabalhadores a fazer a reflexão sobre seu trabalho e a buscar formas de transformá-lo. Visa engajar os profissionais, para que eles 'cuidem do trabalho' e com isso cuidem de si mesmos. A ideia defendida é que os profissionais possam entender que os problemas do *métier* são coletivos, e não individuais, descobrindo, em conjunto com os pares, novas soluções para lidarem com os dilemas enfrentados.

A experiência vivenciada no Grucomat não se trata de uma proposta em clínica da atividade, mas se configura como um coletivo de trabalho cujos membros analisam coletivamente o que realizam, pensam juntos o trabalho. Tal atividade coletiva alimenta a atividade individual, propiciando justamente essa saúde de um coletivo que se reúne em torno de questões comuns.

Os caminhos percorridos pelo grupo colaborativo

O grupo existe desde 2003. Entre 2013 a 2015, o grupo esteve envolvido em um projeto que teve por objetivos

> [...] investigar quais saberes são produzidos e mobilizados em um grupo de trabalho de dimensão colaborativa quando se toma o estudo de aulas videogravadas como objeto de investigação (pesquisa de 2.ª ordem); e a identificar e analisar os discursos matemáticos dos alunos da educação básica nas aulas videogravadas (pesquisa de 1.ª ordem). (Acervo do grupo, Relatório Final)

Neste projeto, o grupo trabalhou colaborativamente, pensando em sequências de tarefas para o ensino da álgebra. O grupo estudou álgebra, planejou sequências de tarefas, e vários dos professores envolvidos as desenvolveram em suas salas de aula, registraram-nas em áudio e vídeo e depois as trouxeram para o grupo analisar, juntamente com os registros produzidos pelos alunos, a fim de verificar a potencialidade dessas tarefas. Após essa análise, muitas vezes, as tarefas foram reelaboradas, e ela também serviu de recurso para que os professores repensassem sua atividade individual.

O grupo se encontra quinzenalmente na universidade. Professores da Educação Infantil ao Ensino Médio e professores da universidade compartilham suas experiências, analisam o trabalho realizado e o reelaboram a partir da colaboração do grupo, lidando com uma questão comum: o desenvolvimento do pensamento algébrico. Temos de um lado, as pedagogas, sem formação específica em matemática, cuja formação inicial não as preparou adequadamente para lidar com tal área do conhecimento, muito menos para tratar especificamente de tal conteúdo. Os professores de matemática que participam do grupo, por sua vez, enfrentam dificuldades para trabalhar com os alunos um conteúdo que é considerado por todos muito difícil de ser aprendido, e como o pensamento algébrico acaba não sendo trabalho nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos têm muita dificuldade em compreender os conceitos. Ao trabalhar juntos, os professores têm tido a oportunidade de conhecer melhor o trabalho um do outro e de desenvolver sua atividade em relação a este conteúdo de ensino.

A dinâmica do grupo faz com que ele se torne um espaço de formação tanto para as pedagogas quanto para os professores especialistas, justamente por permitir essa troca de saberes e práticas. É um espaço de formação diferenciado, pois, ao permitir que seus integrantes tenham uma visão do pensamento algébrico do aluno em todos os níveis de escolaridade, vai além do que acontece nas escolas, que, hoje, separadas por níveis de ensino, impossibilitam esse contato e essa forma de compreensão. Da mesma forma, as professoras da universidade também aprendem com as experiências relatadas pelos professores da Educação Básica.

Durante os encontros do grupo nós estudamos textos teóricos, planejamos tarefas e as analisamos coletivamente. Além disso, os professores envolvidos escrevem narrativas, refletindo sobre o processo vivenciado no desenvolvimento de um ou mais tarefas. Tais narrativas são compartilhadas e também analisadas coletivamente.

Outra experiência que também tem se mostrado bastante rica é a oportunidade de contato com colaboradores externos. Ao longo do trabalho, o grupo contou também com algumas visitas, dentre as quais destacamos: Alessandro Jacques Ribeiro[1] e Arthur Powell[2].

Em sua visita, Alessandro Jacques Ribeiro falou sobre a álgebra, o que nos ajudou a esclarecer muitas dúvidas e possibilitou novos aprendizados. Deu sentido ao que estava sendo discutido em coletivo e despertou o interesse em estudar e desenvolver tarefas com outros conceitos.

A vinda de Arthur Powell também foi muito importante, pois deixou suas sugestões para as narrativas e para repensarmos sobre algumas questões, como a necessidade de fazer perguntas pertinentes, o movimento de reelaboração das tarefas, entre outras. No que diz respeito às problematizações feitas para que os alunos consigam avançar, o grupo oferece grande contribuição à atividade individual dos professores participantes, principalmente através da socialização dos relatos e dos vídeos, em que um, ao ver a prática do outro, pode refletir sobre sua forma de trabalhar

[1] "É licenciado em Matemática, mestre e doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Finalizou recentemente estágio de pós-doutorado na Rutgers, The State University of New Jersey, nos Estados Unidos. É professor e pesquisador no Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC), no estado de São Paulo. É presidente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), gestão 2013-2016. Seus interesses de pesquisa estão relacionados à formação do professor que ensina Matemática e aos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra em todos os níveis escolares." Disponível em: <https://bit.ly/2NokMXC>. Acesso em: 20 ago. 2018.

[2] "Graduado em Matemática e Estatística pela Hampshire College (1976), Mestre em Matemática pela University of Michigan (1977) e Doutor em Educação Matemática pela Rutgers University (2003). Ensina, publica e conduz pesquisa em Educação Matemática. Atualmente é Professor Associado de Educação Matemática no Departamento de Educação Urbana no campus de Newark da Rutgers University (New Jersey). É diretor associado e pesquisador do Robert B. Davis Institute for Learning of the Graduate School of Education. Coordena o Grupo de Pesquisa sobre Comunicação, Tecnologia e aprendizagem matemática da Rutgers University que está empenhado em um projeto investigativo e educativo denominado eMath. É diretor interino do Programa de Política Educacional e sistemas urbanos (Program in Educational Policy, Urban Systems). Além disso, está profundamente engajado em projetos de colaboração internacional entre educadores matemáticos da Rutgers University e os do hemisfério no Sul (Moçambique, África do Sul, Brasil e Haiti). Seus interesses de pesquisa estão relacionados à escrita e à aprendizagem matemática; etnomatemática, desenvolvimento das ideias, raciocínio e heurística matemáticos; desenvolvimento profissional de professores para o ensino de Matemática; e resolução de problemas em Matemática de modo colaborativo e com tecnologia." Disponível em: <http://lattes.cnpq.br/>. Acesso em: 20 ago. 2018.

em sala de aula.

O movimento de receber parceiros externos tem sido importante como um lugar de exotopia (BAKHTIN, 2003) e também contribui muito para o desenvolvimento do grupo:

> *Todas as etapas têm essa reflexão coletiva... porque na escolha da teoria... tinha hora que a gente estava no estudo de uma teoria e aí a gente falava: "Ah, isso não está sendo suficiente, vamos para outro lugar então"* [...]. *Acho que essa questão de buscar parceria de fora, esse terceiro elemento, porque, como a gente está aqui, tão imerso no grupo... Veio o Arthur, veio o Manolis, veio o Alessandro, que foi uma brecada para a gente começar a pensar* [...]. (Marjorie, registro de 02/12/2015)

A colaboração do grupo para a atividade individual

A participação das professoras no grupo colaborativo impacta sua atividade individual de diversas maneiras. Além de terem um espaço concreto de trabalho coletivo, neste espaço elas elaboram conjuntamente tarefas a serem realizadas pelos alunos. Essa elaboração ocorre de forma coletiva. O grupo estuda, convida pesquisadores e depois tarefas são criadas ou adaptadas conforme a intencionalidade do grupo e o nível de ensino em que serão desenvolvidas. Portanto, o que cada professora escolhe fazer com seus alunos para o ensino da álgebra já parte de uma atividade primeira que é a elaboração coletiva. Ao agir, cada uma delas sabe que o que está realizando não foi produzido apenas por ela, ou por um autor de livro didático, mas por um grupo ao qual pertence.

Apresentaremos a seguir trechos de narrativas das professoras envolvidas no Grucomat, buscando dar visibilidade ao movimento que ocorre no grupo.

A elaboração e a realização das tarefas

> *A tarefa que na época escolhi desenvolver foi uma de duas elaboradas a partir de histórias. Devo ressaltar que uma de nossas colegas do Grucomat já havia aplicado a mesma tarefa, não tendo alcançado resultados esperados, esse fato me levou a planejar o desenvolvimento da tarefa, juntamente com a professora da sala, com um cuidado maior, já que inferíamos o porquê de a tarefa não ter tido resultados tão satisfatórios com nossa colega que já havia socializado no grupo a tarefa realizada. (Giancarla, narrativa)*

Para desenvolver uma determinada tarefa, Giancarla tomou como base o relato feito pela colega anteriormente. As tarefas são elaboradas coletivamente, a partir dos estudos feitos. Mas só em contato com a realidade concreta que conseguimos saber se o que foi planejado funcionará bem com as crianças. E só é possível perceber isso quando se destina tempo para analisar o trabalho realizado, por isso a proposta de trazer os vídeos e os relatos sobre o ocorrido tem sido muito formativa e servido para a reflexão não apenas das próprias professoras que desenvolvem as tarefas mas também das que ouvem o relato do outro, podendo aprender a partir dele.

Vemos a partir desse trecho da narrativa, que houve um desenvolvimento da própria tarefa, mediado pela reflexão coletiva.

A reflexão do trabalho realizado coletivamente

> *Retornei ao Grucomat com o resultado do trabalho e discutimos sobre a questão do vocabulário na Educação Infantil. Os sentidos dados pelas crianças às palavras utilizadas em alguns casos são diferentes dos nossos. [...]. No final da discussão, concluímos que seria melhor pedir às crianças para representarem uma sequência, com um segredo, mas com objetos, e não por meio de desenho. Então, retornei à sala de aula e propus às crianças, em pequenos grupos, que montassem uma sequência, utilizando as peças de um jogo de montar, para os colegas adivinharem qual era o segredo e continuar a sequência de cores. (Selma, narrativa)*

Selma relata que a tarefa proposta inicialmente não teve o resultado que ela havia imaginado. No entanto, após socializá-la no Grucomat, a tarefa foi reelaborada com o auxílio da análise coletiva: "*A socialização da atividade com os participantes do Grucomat permitiu que encontrássemos, juntos, novas estratégias para desenvolver a atividade com as crianças.*", avaliou a professora.

Também é importante destacar que o movimento de ideias e as análises que ocorrem no contexto do grupo não acontecem de forma estanque e pontual. O próprio movimento da escrita das narrativas e o fato de elas serem lidas pelos colegas do grupo contribuem para que as reflexões sejam constantemente retomadas e, por vezes, reelaboradas.

> *Acreditamos que aumentar o tamanho do papel, conforme sugestão construída durante o encontro do Grucomat no segundo semestre de 2014, não provocaria maior aprendizagem do tema, mas sim ofereceria boas problematizações para as crianças resolverem, faria elas "desenhar[em] suas posições, ideias e teorias atuais" (FORMAN et al., 1999, p. 239), proposta que também foi pontuada no grupo.*
>
> *Outra hipótese levantada pelos pesquisadores do Grucomat nos momentos de análise e reflexão sobre a proposta desenvolvida é que o desenho como registro não atende ao objetivo esperado para a proposta de álgebra com alunos na faixa etária entre 3 e 4 anos, visto que as crianças nessa idade não sentem necessidade de comunicar o desenho fora do contexto da tarefa. (Marjorie e Juliana, narrativa)*

Reelaboração da tarefa

> *Durante as discussões do grupo, percebi que não consegui fazer questionamentos*

durante a socialização, para que os alunos conseguissem se mobilizar no decorrer da tarefa e refletir sobre ela, embora tenham feito várias relações, principalmente ao final da tarefa, faltava algo, faltava levantar outras hipóteses e validá-las.

Ao repensar a tarefa das fitas e as possibilidades de perguntas que poderia ter feito com os alunos no ano de 2014, me fez não somente pensar nas questões mas voltar à tarefa e observar as possibilidades que ela oferecia além das que propus naquele momento. Diferentemente dos caminhos percorridos no ano passado, esse 3.º ano pôde vivenciar momentos em que muito pouco fiz as intervenções, mas deixei fluir as discussões entre eles, guiando-os e acompanhando-os em todos os momentos. [...] quais os rumos que esse caminhar iria tomar, agora, com maior segurança, percebia a constituição desse processo, dos alunos, enfim, da minha voz, das minhas intervenções, dos meus objetivos acreditando e confiando nas potencialidades das crianças. (Cidinéia, narrativa)

A narrativa da Cidinéia mostra que a análise realizada pelo grupo a mobilizou a repensar o modo de conduzir a tarefa e a realizá-la novamente com outro grupo, em outro ano. Sobre isso, é interessante destacar o movimento formativo do grupo e o processo contínuo de desenvolvimento que proporciona, fazendo com que as professoras possam rever suas práticas e reinventá-las.

A professora Cláudia também passou por um processo de reelaboração da tarefa, após o trabalho com os alunos e a respectiva discussão no grupo:

Após a realização da tarefa, recolhi os registros escritos dos alunos e levei para o grupo colaborativo da Universidade. O grupo, a partir dos meus depoimentos, das dúvidas que os alunos tiveram frente às questões por nós formuladas, constatou a necessidade de reformular o enunciado das perguntas para atingir os objetivos daquela tarefa. [...]

O grupo pensou, discutiu e ajustou as perguntas. Confirmamos ainda mais que as discussões e reflexões teóricas sobre os registros das aulas possibilitam a investigação sobre os discursos matemáticos em sala de aula. (Cláudia, narrativa)

O que havia sido planejado pelo grupo não teve os resultados esperados, os enunciados elaborados confundiam os alunos e, então, o Grucomat, de posse das respostas das crianças à tarefa elaborada, pôde rever e reelaborar o enunciado.

Considerações finais

Como pudemos perceber nas falas das professoras, o trabalho colaborativo impacta fortemente a atividade em seus diferentes contextos de atuação. Elas encontram no grupo um espaço-tempo diferenciado, sentem-se seguras para analisar criticamente o próprio trabalho e o das colegas.

> *Acho que o grupo colaborativo não existiria se não existisse essa parceria que há entre nós! De dizer "não foi legal, mas o que a gente pode mudar", e não estou dizendo de uma prática, mas de uma proposta que é de todas, que todas se sentem corresponsáveis por ela [...]". (Juliana, Registro de 02/12/2015)*

Para estas professoras, o coletivo tornou-se um instrumento para a atividade individual (CLOT, 2010), ao menos no que se refere ao ensino da álgebra. Ao trabalharem este conteúdo nas escolas, elas não se sentem sozinhas, uma vez que estão amparadas por um grupo que as ultrapassa. Tal movimento é de extrema importância, sobretudo considerando-se o contexto atual das políticas educacionais, que têm exaltado a responsabilização individual do professor, pelo seu "sucesso" ou "fracasso".

Assumindo, com Vigotski, que é na relação com o Outro que nos tornamos nós mesmos, no grupo as professoras podem dialogar umas com as outras sobre a prática que exercem, contribuindo para o desenvolvimento de sua atividade profissional. Bakhtin (2003, p. 373-374) nos diz que, sozinhos, não conseguimos ter uma dimensão completa sobre nós mesmos. Precisamos do excedente de visão do Outro para nos completar:

> Tudo o que me diz respeito, a começar pelo meu nome, chega do mundo exterior à minha consciência pela boca dos outros (da minha mãe, etc.), com a sua entonação, em sua tonalidade valorativa emocional. A princípio eu tomo consciência de mim através dos outros: deles eu recebo as palavras, as formas e a tonalidade para a formação da primeira noção de mim mesmo.

No grupo, os colegas ajudam-se mutuamente a analisar o vivido, a olhar o que sozinhos não conseguem ver. O que só acontece porque há o registro e o compartilhamento do que vivem, através dos vídeos, das narrativas e dos relatos nas reuniões. E é no diálogo, no encontro e confronto de histórias e experiências distintas que as professoras têm se constituído como tal, entendendo e vivendo a prática profissional não como uma atividade solitária e individual, mas sim de maneira profundamente coletiva e partilhada.

Referências

ANJOS, Daniela Dias dos. *A profissão docente em questão:* gênero de atividade, gênero de discurso e habitus. 2013. 225f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

BAKHTIN, Mikhail. *Estética da criação verbal.* 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

CLOT, Yves. Entrevista: Yves Clot. *Cadernos de Psicologia Social do Trabalho*, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 99-107, dez. 2006.

CLOT, Yves. De l'analyse des pratiques au développement des métiers. *Éducation et didactique,* Varia, v. 1, n. 1, p. 83-93, abr. 2007.

CLOT, Yves. *Trabalho e poder de agir*. 1ª ed. Belo Horizonte: Fabrefactum, 2010.

DALBEN, Adilson. Avaliações de desempenho do aluno para a atribuição de sanções e bonificações à escola e ao professor. In: TOMMASIELLO et al. (Orgs.). *Didática e práticas de ensino na realidade escolar contemporânea:* constatações. Araraquara, SP: Junqueira & Marin, 2012. p. 2.426-2.437. Trabalhos apresentados no XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino, realizado em Campinas, SP, de 23 a 26 de julho de 2012. Livro 3. Disponível em: <https://bit.ly/2BRUiwq>. Acesso em: 20 ago. 2018.

FREITAS, Luís Carlos. Os reformadores empresariais da educação: da desmoralização do magistério à destruição do sistema público de educação. *Educação & Sociedade*, Campinas, v. 33, n. 119, p. 379-404, abr./jun. 2012.

OLIVEIRA, Dalila Andrade. A reestruturação do trabalho docente: precarização e flexibilização. *Educação & Sociedade*, Campinas, v. 25, n. 89, p. 1.127-1.144, set./dez. 2004.

PINO, Angel. O social e o cultural na obra de Vigotski. *Educação & Sociedade*, ano XXI, n. 71, p. 45-78, jul. 2000.

ROGER, Jean-Luc. *Refaire son métier.* Essais de clinique de l'activité. Toulouse, FR: Erés, 2007.

SMOLKA, Ana Luiza Bustamante. *Relatório Final:* Projeto Fapesp para Melhoria do Ensino Público: Condições de desenvolvimento humano e práticas contemporâneas: as relações de ensino em foco. São Paulo: Fapesp, 2011. Proc. n. 2009/50556-0. 2012. Disponível em: <https://bit.ly/2BRdcTX>. Acesso em: 20 ago. 2018.

VIGOTSKI. Lev. Semyonovich. Manuscrito de 1929. *Educação & Sociedade*, ano XXI, nº 71, p. 21-44, jul. 2000.

UM OLHAR RETROSPECTIVO PARA A PRODUÇÃO DO GRUCOMAT

Iris Aparecida Custódio
Adair Mendes Nacarato

INTRODUÇÃO

Neste capítulo produzimos uma síntese do trabalho sistematizado pelos participantes do Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat). Dentre os capítulos que compõem esta obra, 11 contêm narrativas de professoras; neles podemos identificar o movimento existente num grupo de pesquisa que consiste em estudos, elaboração de sequências de tarefas para a sala de aula, realização dessas tarefas, registro das produções, com a posterior análise do professor e dos colegas do grupo – pautado na metodologia da design research. Trata-se de um processo em que os professores são ouvidos e suas experiências validadas pelos pares, e tal movimento reverbera nas práticas dos participantes, que também se colocam à escuta de seus alunos, valorizando suas ideias matemáticas. Parte dessa dinâmica será analisada neste texto.

Esta coletânea é resultado do projeto "A videogravação de aulas de matemática como ferramenta para a pesquisa em formação docente: produção e análise de vídeos", no âmbito do Projeto Universal do CNPq (Processo 475848/2012-8), no qual o grupo elegeu a unidade temática "álgebra". Durante quatro anos estudamos, discutimos, refletimos e buscamos caminhos para o trabalho em sala de aula, de forma a possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos diferentes níveis de ensino – da Educação Infantil ao Ensino Médio. As narrativas aqui apresentadas centram-se nessa temática e no processo de reconhecer os raciocínios e as estratégias dos alunos frente às tarefas voltadas à álgebra, bem como os processos vivenciados pelos professores.

Organizamos este texto em dois eixos, a partir daquilo que emerge nas narrativas dos professores: o processo formativo existente no Grucomat e os indícios de processos de generalização pelos alunos, sinalizando para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

PROCESSOS FORMATIVOS QUE CONTRIBUEM PARA O EMPODERAMENTO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA

Defendemos que, para a constituição e para a efetivação de um grupo, os integrantes precisam ter objetivos comuns e uma intencionalidade explícita para o trabalho colaborativo. Mais importante que afirmar que um grupo é colaborativo, é explicitar os modos como ele se organiza e como os participantes nele se engajam. Dentre os objetivos comuns do Grucomat, um deles se refere à escolha de uma temática para estudos. Neste caso, a temática foi a álgebra.

Como explicitado no texto de apresentação desta coletânea, o que nos motivou a estudar a temática foi a publicação do documento "Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental" (BRASIL, 2012), no âmbito do Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC). Tal documento, ao fazer referências à temática de álgebra desde os anos iniciais, nos mobilizou para o seu estudo, visto que, até então, a comunidade de educadores matemáticos pouco tinha se debruçado sobre ela, tanto para a produção de materiais quanto para reflexões sistemáticas sobre como introduzir algumas dimensões do pensamento algébrico desde o início da escolarização.

No entanto, ter apenas uma temática definida não basta para garantir um trabalho colaborativo e investigativo. Outras ações e dinâmicas são necessárias: a produção e a análise de sequências de tarefas e a sistematização da experiência em sala de aula, na forma de narrativas de prática.

Ao trazermos no capítulo 1 a discussão sobre a *design research*, nosso objetivo foi explicitar essa dinâmica, evidenciando como o grupo foi se tornando uma comunidade de investigação. Ao adotar tal perspectiva de pesquisa, nos aproximamos das atuais tendências de formação docente, que consideram o professor o protagonista de sua prática de sala de aula e um pesquisador de sua própria prática (NACARATO; GRANDO, 2013).

Ao longo da constituição do Grucomat e das sistematizações já realizadas, temos evidências de que o professor precisa se mobilizar para o seu próprio desenvolvimento profissional. Ou seja, as práticas de formação, geralmente adotadas pelas políticas públicas, têm se mostrado ineficientes, uma vez que os professores raramente são ouvidos e as temáticas desenvolvidas nem sempre partem de suas necessidades. Assim, eles não se sentem protagonistas dessas práticas e, consequentemente, pouco aprendem a partir delas. Em contrapartida, se os professores encontram espaços formativos com os quais se identificam, eles se envolvem e se transformam, como evidenciam os textos aqui apresentados.

A colaboração é produzida pelas interações estabelecidas entre os múltiplos saberes dos partícipes: cada um colabora com sua bagagem teórica e metodológica e com suas experiências. A forma de interação entre esses potenciais representa a qualidade da colaboração: quanto menores as relações de opressão e poder, maior o potencial colaborativo. Nesse movimento, todos aprendem.

Além disso, há o próprio prazer em estar junto com outros professores interessados em compartilhar práticas e saberes, em trabalhar junto, em trocar ideias, em sistematizá-las. É na alteridade, segundo os estudos bakhtinianos, que os professores vão se apropriando de outros discursos, de outras práticas e transformando-os para os seus propósitos.

Para Bakhtin (2003, p.13): "avaliamos a nós mesmos do ponto de vista dos outros, através do outro procuramos compreender e levar em conta os momentos transgredientes à nossa própria consciência". Ou, ainda, "ao olharmos para nós mesmos com os olhos do outro, na vida sempre tornamos a voltar para nós mesmos, e o último acontecimento, espécie de resumo, realiza-se em nós nas categorias da nossa própria vida" (p. 14). Daí a importância do trabalho colaborativo; do respeito que cada participante tem com os colegas; de ousar expor-se, filmar uma aula, mesmo quando nem tudo sai como era previsto.

De Cochran-Smith e Lytle (1999) e Jaworski (2008) nos apropriamos do conceito de comunidade de investigação. Tal comunidade se caracteriza pela parceria entre os participantes: professores da universidade, professores da educação básica e alunos da pós-graduação, na realização de investigações compartilhadas. Cochran-Smith e Lytle (1999) também contribuem com o trabalho do grupo, ao apresentarem o conceito de "conhecimento da prática", ou seja, o conhecimento que é produzido localmente pelo professor e sistematizado, gerando novos conhecimentos sobre as práticas de ensinar e de aprender matemática e, no caso deste livro, a álgebra. Esse conhecimento é de um valor inestimável para a academia. O professor, capaz de olhar reflexivamente para a sua prática e sistematizá-la, constrói uma "postura investigativa". A escrita do professor vem permeada pelas reflexões produzidas ao longo do processo. O professor deixa de ser consumidor de teorias produzidas por pessoas externas à sala de aula e passa a assumir a postura de pesquisador.

As narrativas de prática são por nós consideradas como a sistematização da pesquisa do professor da escola básica. Ao produzir suas narrativas, ele não apenas relata os acontecimentos de sala de aula, como também pode refletir sobre eles, produzindo conhecimento da prática, o que poderá contribuir para a formação de outros professores. A professora Giancarla, por exemplo, em sua narrativa, observa:

> *A experiência da tarefa foi rica, porém mais rico ainda foi o processo de análise e discussão e também a pausa para a escrita deste texto. É esse processo de análise, discussão e reflexão que proporciona o aprimoramento de minha ação na escola como gestora. Apesar de não atuar em sala de aula, tenho subsídios para orientar, sugerir, questionar... levar à reflexão! Nesse movimento, posso oportunizar também o desenvolvimento profissional dos docentes da escola onde atuo. (Narrativa de Giancarla)*

Compreendemos que "no ato de escrita, a busca, nas práticas vividas, de elementos significativos para serem narrados constitui dispositivo de autoformação, pois, no momento de redigi-los, o professor reflete sobre suas trajetórias e produz sentidos para o vivido e experienciado"

(LUCIO; NACARATO, 2017, p.49).

A elaboração e o compartilhamento de narrativas de práticas, adotados pelo grupo, não só contribuem para o processo de formação e autoformação de seus integrantes, como também viabilizam um espaço de empoderamento do professor.

O GRUCOMAT como espaço de empoderamento do professor

Acreditamos em uma formação que compreenda a prática do professor como ponto de partida e de chegada. Desta forma, é criada uma comunidade de investigação da qual o professor se sente parte integrante. Esse espaço colaborativo, constituído a partir do grupo, é significativo, como considera a professora Cidinéia:

> *Vejo o grupo como um processo de fazer-se e refazer-se cotidianamente por meio da mobilização, da ação e da cumplicidade progressiva, criada a partir de um ambiente de construções, aprendizagens e negociações. Nesse espaço, refaço-me constantemente, reflito, reinvento, analiso, escuto e sou ouvida, pois ali é estabelecido um compromisso mútuo, um ambiente de cumplicidade. (Narrativa de Cidinéia)*

As narrativas de práticas têm

> [...] sido por nós considerada como gênero de discurso, que possibilita a sistematização e a análise de práticas em situação, além de ser a pesquisa do professor sobre sua própria prática. A produção dessas narrativas tem como objetivo não apenas sistematizar as práticas de sala de aula, mas também compartilhá-las com os pares. A produção e a leitura de narrativas de aula pelos pares têm se constituído em práticas de formação e podem possibilitar experiências para o professor. (LUCIO; NACARATO, 2017, p.54)

Selma explicita a relevância da escrita direcionada e compartilhada, ao relatar como foram importantes a leitura e a devolutiva do professor Arthur B. Powell em visita ao Grucomat, no ano de 2015. Em sua narrativa escrita, ela traz indícios de como o olhar do outro auxilia em nossa formação e de que forma o compromisso com o trabalho do professor possibilita seu empoderamento:

> *Por falar em discussão em grupo, no dia 15 de junho de 2015, o professor Arthur Powell visitou o Grucomat. Antes do encontro, ele leu todas as narrativas dos participantes, inclusive a minha, e deu uma devolutiva muito enriquecedora, do ponto de vista conceitual. Foi um momento de aprendizagem! Ao ouvi-lo, percebi o quanto estava equivocada em relação à forma como apresentei a atividade do trem às crianças. O pesquisador me levou a concluir que eu expus às crianças o padrão, mas deveria ter apresentado uma sequência. Isso dificultou a compreensão dos alunos e os levou a montar padrões e não sequências. No final do encontro, estava decidida a fazer novamente a atividade com outro grupo de crianças. (Narrativa de Selma)*

A professora Cidinéia também explicita a importância do olhar do outro, por meio da leitura das narrativas de práticas. Para ela, foram as discussões no grupo que a levaram não só a repensar a tarefa que havia proposto aos seus alunos, mas também a traçar novos caminhos e reelaborá-la:

> *Esse conjunto de episódios foi levado para o Grucomat, para o qual apresentei tanto a videogravação quanto a narrativa. Nas discussões do grupo, percebi que não consegui fazer questionamentos durante a socialização para que os alunos conseguissem se mobilizar no decorrer da tarefa e refletir sobre ela. Portanto, apesar de terem feito várias relações, principalmente ao final da atividade, faltava algo, faltava levantar outras hipóteses e validá-las. A professora Adair Nacarato e o professor Arthur Powell, presentes nesse dia, fizeram um questionamento semelhante, que pode ser reproduzido da seguinte forma: "que perguntas poderia ter feito e não fez para ajudar as crianças a avançarem?". Instigada por essa questão e pelas discussões no grupo, percebi que poderia repensar a tarefa e, ao mesmo tempo, refletir mais em torno dela. Com isso, a tarefa das fitas ganhou um novo significado para mim: tracei um novo percurso, e foi rumo a ele que decidi trilhar. (Narrativa de Cidinéia)*

Os excertos das narrativas destacados neste eixo de análise revelam como o espaço criado no grupo possibilita que o professor se sinta protagonista de sua formação e como esse protagonismo viabiliza seu empoderamento. Empoderamento esse possibilitado também pela natureza das tarefas elaboradas e desenvolvidas pelos professores, tal como discutido no texto de Arthur B. Powell. Para o autor, as tarefas devem engajar os alunos em interações discursivas; na estruturação das interações discursivas, os aprendizes (aqui também incluímos os professores) exercitam sua agência – ferramenta epistêmica para a comunicação numa aula de matemática.

As narrativas evidenciam o movimento do Grucomat, que integra: elaboração, realização e análise de tarefas, mediadas por diferentes ferramentas e sintetizadas e analisadas pelos participantes.

O GRUPO COMO ESPAÇO DE FORMAÇÃO

Na perspectiva vigostkiana, nos constituímos a partir das relações que estabelecemos com o outro e por meio delas; são elas que propiciam a apropriação dos signos e dos conhecimentos cultural e historicamente elaborados. Em complementação às contribuições vigotskianas, lançamos mão de uma perspectiva bakhtiniana que defende o situar-se em *lugar exterior*. Esse lugar permite o olhar do outro para o eu e meu olhar sobre o meu próprio eu. No caso do Grucomat, compreendemos que as narrativas de práticas criam esse *lugar exterior*, *exotópico*. São elas que propiciam o enxergar a própria prática (de um lugar externo); o refletir sobre ela e ressignificá-la; e a análise do colega de grupo, que, ao lançar seu olhar sobre o outro, permite que ele mesmo recrie a imagem que tem de si e de suas práticas. Precisamos do outro para construirmos a imagem que temos de nós mesmos e precisamos dele em nosso processo de formação.

A dinâmica de trabalho do grupo, a partir do estudo de conceitos, a elaboração ou a adaptação de tarefas, seu desenvolvimento em sala de aula, a seleção de excertos de videogravações dessas aulas para o compartilhamento com os demais integrantes e a elaboração de narrativas de práticas, fizeram do grupo uma comunidade de investigação e, consequentemente, um espaço de formação.

Ao longo dos vários anos de estudos e discussões, fomos, como grupo, identificando a forma como a heterogeneidade e os desafios para o trabalho com as dimensões do pensamento algébrico em diferentes níveis de ensino constituíram importantes caminhos para nossa formação. Em sua narrativa, Marjorie e Juliana ressaltam o desafio que se constituía o trabalho compartilhado com professores de diferentes níveis e atuando em diversificadas funções dentro da escola:

> *Pensar sobre o trabalho na Educação Infantil configurou-se como um grande nó em nossos encontros, visto que apenas quatro integrantes eram pedagogas — três atuando como gestoras em escolas de Educação Infantil e apenas uma lecionando em sala de aula — e os demais eram graduados em Matemática. Os "achismos" eram muitos, e as divergências de opiniões — ou a falta delas — deixavam-nos inseguros. Com isso, optamos por criar sequências e observar a atuação das crianças diante de nossas ideias para avaliar o que seria necessário rever e o que se configurava como boas estratégias de aprendizagem para as crianças. Há que se considerar que não há em nosso país a tradição do ensino da chamada 'pré-álgebra'; no entanto, os atuais documentos curriculares sinalizam para a importância da inserção de atividades voltadas ao pensamento algébrico, desde o 1.º ano do ensino fundamental. Diante disso, sentimo-nos mobilizadas para pensar em práticas anteriores com atividades voltadas à percepção de regularidades e padrões, ainda na Educação Infantil, que possam subsidiar o trabalho posterior no 1.º ano. (Narrativa de Juliana e Marjorie)*

Para Raquel, as discussões no grupo serviram de inspiração para que ela propusesse tarefas que explorassem a percepção de regularidades e a generalização de propriedades com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA):

> *Buscávamos encontrar, no contexto de generalização de propriedades dos números e das operações, potencialidades para o desenvolvimento desse raciocínio. Para isso, as leituras se intercalavam com as pesquisas, as análises e as adequações de tarefas investigativas que poderiam favorecer a percepção e a generalização de padrões em sequências. A análise das possibilidades de algumas tarefas já inspirava, em cada componente do grupo de estudos, questionamentos sobre o envolvimento dos alunos diante desses desafios. As leituras, as reflexões, a análise e a seleção das tarefas consistiam em um movimento muito interessante e instigante. Isso me incentivou a investigar a ação dos estudantes de turmas da Educação para Jovens e Adultos, desafiando-os com a proposição de algumas dessas tarefas que envolviam o pensamento algébrico. Contudo, surgiam também inseguranças relacionadas às expectativas que alguns jovens e adultos carregam consigo ao chegar e/ou retornar aos bancos das escolas. (Narrativa de Raquel)*

Na narrativa de Cláudia também podemos observar a importância dessa comunidade de investigação para que o professor não só instaure uma cultura social de aula de matemática, mas também se aproprie de perspectivas teóricas discutidas e as incorpore ao trabalho docente:

> *A atividade apresentada reforça a importância de uma cultura social de sala de aula, na qual o professor problematize o tempo todo, isto é, coloque os alunos em um movimento reflexivo, não lhes fornecendo respostas, mas novas questões. Pode-se dizer que meu papel nessa tarefa foi ensinar aos alunos como se resolve um problema, ou seja, indicar a eles o que é relevante no texto e qual é a pergunta proposta. O gênero textual problema precisa ser trabalhado em sala de aula, somente dessa forma o aluno ficará mais atento à pergunta do que ao problema. Na perspectiva histórico-cultural, é muito importante relacionar a interação social, a linguagem e o desenvolvimento do ser humano. A palavra serve como meio de interação e compreensão entre os sujeitos. Fazendo o uso da linguagem, os alunos têm a possibilidade de elaborar, registrar e compartilhar suas ideias matemáticas. Com esse movimento de analisar e generalizar as características por meio da linguagem, os estudantes organizam ou transformam seus conceitos. Esse ambiente se pauta em alguns princípios: o diálogo como condição necessária para a comunicação e, consequentemente, a aprendizagem. (Narrativa de Claudia)*

Temos trabalhado com o conceito de cultura social de sala de aula a partir das ideias de Hiebert et al. (1997), concebendo a sala de aula como espaço de produção e socialização de conhecimentos, pautadas nas discussões e nas interações entre os alunos, mediadas por tarefas que empoderam e exercitam a agência matemática dos envolvidos.

Aprendizagens e Saberes evidenciados pelas professoras

Desde o início do nosso trabalho no Grucomat nossa preocupação sempre foi com o desenvolvimento profissional e as aprendizagens dos professores. Na perspectiva teórica que adotamos – a histórico-cultural – esses dois construtos estão inter-relacionados dialeticamente, ou seja, a aprendizagem promove o desenvolvimento e este, por sua vez, possibilita novas formas de aprendizagem. Ambos ocorrem num movimento dinâmico entre o coletivo e o singular, e as práticas compartilhadas são potencializadoras para que isso ocorra.

A aprendizagem pressupõe processos de significação e, no grupo, as ideias que circulam produzem sentidos para a prática docente, para o aprender e ensinar matemática em diferentes níveis de ensino. Para Colinvaux (2007, p. 32): "a aprendizagem está associada a processos de compreensão do mundo material e simbólico, que pressupõem geração, apropriação, transformação e reorganizações de significações". Os signos e sentidos são criados e transformados, possibilitando a apropriação de novos conhecimentos e a elaboração de novos conceitos – no caso, conceitos algébricos. Assim, aprendizagem e desenvolvimento ocorrem em processos mediados pelo outro e pela palavra. Esse outro podem ser os pares do grupo ou os alunos na sala de aula. A professora Cidinéia explicita esse movimento em sua narrativa.

> *Essa trajetória de convicções, possibilidades e transformação me fez perceber que*

a aprendizagem se faz nessa dialogicidade entre professor e aluno e, ao mesmo tempo, entre professores nos grupos colaborativos, como o Grucomat. A participação no grupo me possibilitou repensar e discutir minha prática enquanto professora, o que ocorreu enquanto escrevia minha narrativa e compartilhava esta e as videogravações e enquanto analisava todo esse percurso com a tarefa das fitas. Tal oportunidade me fez acreditar ainda mais na importância dessa troca com docentes que enxergam a amplitude dos caminhos da Matemática, vendo-a como uma disciplina que proporciona reflexões, discussões e muito aprendizado. (Narrativa de Cidinéia)

Cochran-Smith e Lytle (1999) contribuem para a nossa reflexão no que diz respeito à aprendizagem docente, visto que relacionam a aprendizagem a três concepções de conhecimento: "conhecimento para a prática", em que o professor tem uma postura passiva na produção do conhecimento; "conhecimento em prática", no qual o papel docente é centrado na reflexão, na investigação e na produção de conhecimento para resolver os problemas com que se depara no cotidiano escolar; e "conhecimento da prática", em que o conhecimento se produz de forma colaborativa.

Entendemos que no Grucomat é a terceira concepção que prevalece, pois acreditamos existir nele o que as autoras denominam de "investigação como postura", pautada nas relações de pesquisa, conhecimento e prática profissional. Cochran-Smith e Lytle (1999) defendem que essa postura investigativa traz resultados promissores para iniciativas relacionadas à formação de professores, ao desenvolvimento profissional, ao desenvolvimento curricular e à mudança social e escolar.

O grupo possibilita desenvolver essa postura, pois os professores, ao analisarem as práticas dos colegas, refletem sobre sua própria prática, apropriam-se de novos modos de propiciar um ambiente de aprendizagem a seus alunos. Além disso, essa postura possibilita que os professores se tornem protagonistas de sua própria prática e passem a ser consumidores críticos de teorias elaboradas externamente ao cotidiano escolar.

O professor, ao registrar a sua prática, toma consciência de sua própria aprendizagem, pois reflete sobre o que deu (e o que não deu) certo em sala de aula e produz "conhecimento da prática", como podemos identificar no excerto da narrativa de Juliana e Marjorie:

No caso de nossa tarefa, constatamos que o desenho não foi determinante para observarmos o desenvolvimento da percepção de regularidades pelas crianças. Uma estratégia para entendermos o pensamento das crianças sobre o assunto, suas construções ou as dúvidas que permaneceram para elas após o desenvolvimento da proposta é a roda de conversa. Esta pode oportunizar às crianças a narração oral do que desenharam. [...] Pensamos que a dificuldade por nós encontrada está, como afirma Radford (2013, p.8), em nossas escolhas "de determinantes sensíveis no terreno Fenomenológico". Segundo o autor, "estas dificuldades resultam das várias possibilidades que oferece a percepção dos termos dados" (p. 8). No caso da tarefa proposta, a pergunta elaborada não contribuiu para que os alunos se

> *atentassem para o que estava sendo solicitado: a posição de cada um na fila. Talvez a questão pudesse ter sido: "Como ficará o próximo ao entrar na fila, em pé ou sentado?". Essa questão estaria mediando a observação das crianças e, talvez, possibilitando que elas tivessem a percepção dos elementos componentes da sequência. (Narrativa de Juliana e Marjorie)*

O ato de escritura da narrativa possibilita a reflexão sobre o processo vivido em sala de aula. Ao discutir e compartilhar as narrativas no grupo, as professoras vão assumindo essa postura investigativa, passam a ter um olhar mais criterioso para as ideias dos alunos e os modos como as tarefas são trabalhadas em sala de aula. Giancarla explicita esse movimento em sua narrativa.

> *A experiência da tarefa foi rica, porém mais rico ainda foi o processo de análise e discussão e também a pausa para a escrita deste texto. É esse processo de análise, discussão e reflexão que proporciona o aprimoramento de minha ação na escola como gestora. Apesar de não atuar em sala de aula, tenho subsídios para orientar, sugerir, questionar... levar à reflexão! Nesse movimento, posso oportunizar também o desenvolvimento profissional dos docentes da escola onde atuo. (Narrativa de Giancarla)*

As vozes do grupo também se fazem presentes nas narrativas das professoras, como destacou Giancarla:

> *Mas tanto as tarefas da bandeirinha e do colar quanto as de formação da fila e da roda eram realizadas sem um conhecimento matemático mais específico e, principalmente, sem questionamentos que colocassem a criança em movimento de reflexão e, portanto, de aprendizagem. Isso ficou muito claro quando, no grupo, debatemos que apenas seguir a sequência não significa perceber o padrão e as regularidades. E, muitas vezes, quando realizamos uma atividade de sequência e percebemos que a criança continuou corretamente, não a questionamos. Dessa forma, não temos a certeza de que a criança percebeu o padrão. (Narrativa de Giancarla)*

Nesse excerto, a professora também explicita as limitações conceituais que, na maioria das vezes, marcam as trajetórias dos professores de educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental, visto que elas não têm uma formação matemática consistente, em decorrência da própria estrutura curricular dos cursos de Pedagogia. Para esse grupo de profissionais, a formação continuada é de extrema relevância. Mas não é qualquer formação. Nossa defesa é por modelos de formação que partam das necessidades dos professores. Os grupos colaborativos ocupam papel central como modelo de formação.

Se, por um lado, os professores graduados em Pedagogia têm limitações conceituais, por outro, os professores especialistas que, embora com maior conhecimento conceitual, também aprendem com os colegas que atuam nos anos iniciais, principalmente nos modos de condução da aula e do seu registro para compartilhamento no grupo:

> *A prática docente exige muito mais que isso, exige uma articulação entre os saberes provenientes da formação profissional e os experienciais. Como já indicado,*

essa foi a minha primeira experiência com uma aula videogravada e com o tema "sequências e padrões". No final, gostei do resultado; os alunos também ficaram satisfeitos, conseguiram entender a proposta e chegar às soluções. Notei a motivação deles quando terminaram a primeira atividade proposta e me cobraram a continuação daquela que não havia dado certo. Essa atividade fez com que eu olhasse para as aprendizagens dos alunos e também para minha própria. Voltei-me para meu próprio desenvolvimento profissional e vi que estou sempre aprendendo com meus próprios alunos, com a visualização de minha aula videogravada, com minha própria experiência. (Narrativa de Kelly)

Pode-se dizer que o grupo aprendeu coletiva e colaborativamente. Os vídeos produzidos ou os diálogos transcritos, ao trazerem as vozes dos alunos, também nos possibilitaram conhecer e compreender como o estudante, em qualquer nível de ensino, pensa algebricamente e como explicita esses modos de pensar, oportunizando-nos novos olhares para as tarefas a ser elaboradas. Os alunos foram nos dando pistas das potencialidades de cada uma, propiciando-nos novos conhecimentos. Nesse movimento, fomos aprendendo e nos desenvolvendo profissionalmente, conforme aponta o texto de Adair e Kátia, ao aliarem a metodologia de *design research* e da *teacher design research*, como promotoras de desenvolvimento profissional.

INDÍCIOS DE PROCESSOS DE GENERALIZAÇÃO PELOS ALUNOS

Ao iniciarmos nossos estudos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico, não tínhamos conhecimento de como seria a reação dos alunos às tarefas que iríamos propor. Os trabalhos de autores como Mason (2007), Radford (2012, 2014) e Vale e Pimentel (2011) foram inspiradores para as primeiras tarefas elaboradas pelo grupo. Mas nossa expectativa era enorme: os estudantes brasileiros vão se mobilizar para tarefas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico? Obteremos modos de pensar que se aproximam daqueles registrados na literatura?

Há no grupo uma prática muito dinâmica dos professores: tão logo começamos a estudar uma temática, (eles) já querem testar as tarefas em sala de aula. Algumas delas foram adaptadas de outros materiais; outras produzidas pelo próprio grupo, porém todas, como analisado no capítulo 1, passaram por processos de escrita e reescrita, a partir dos resultados obtidos em sala de aula.

Um dos consensos do grupo é que, com as crianças mais novas – educação infantil e ciclo de alfabetização (1.º ao 3.º ano) –, o foco seria na percepção de regularidades em sequências, com repetição de um motivo ou padrão. Partimos de sequências que exploravam: movimento corporal, sons, figuras e números ou o emprego de materiais manipulativos. Mas tínhamos um desafio: a criança da educação infantil é capaz de generalizar? O que propor? Decidimos que, se as crianças fossem capazes de compreender o que é uma sequência, isso já seria uma conquista. Partimos, então, a pensar em contextos que pudessem inserir a criança da educação infantil na percepção de sequências.

A narrativa de Juliana e Marjorie traz indícios de que, numa tarefa de jogo corporal, com o que denominamos *a fila*, as crianças não só perceberam que a organização da fila tinha a repetição de um padrão – aluno em pé, aluno sentado, aluno ajoelhado –, como foram capazes de desenhar a sequência. Vale destacar que as professoras do grupo optaram pela utilização da palavra *segredo* para se referir ao padrão da sequência.

A narrativa de Selma, que utilizou materiais manipulativos com as crianças, revela o percurso da professora ao introduzir o tema. Inicialmente ela propôs a montagem de um trem, com vagões coloridos, mas apresentou apenas um padrão, não uma sequência. A tarefa não atendeu às suas expectativas por algumas razões: as crianças não conheciam trem, e a proposta foi muito diretiva, com a oferta do padrão. Além disso, o uso da palavra "segredo" foi interpretado pelas crianças como "algo que não se pode dizer a alguém".

Ao trazer os resultados para o grupo, discutimos e sugerimos a ela que retomasse a tarefa com os alunos, montando uma sequência para que as crianças dessem continuidade e não apenas expondo o padrão. Ela retomou a tarefa, e os resultados, por ela analisados em sua narrativa, revelam que as crianças conseguiram compreender o que era a sequência, muito embora, segundo ela, os alunos tivessem sido capazes de continuar a sequência, mas não de dizer qual era o padrão. Isso pode ser revelador do papel da palavra na elaboração de um conceito; nessa faixa etária, as crianças são visuais e capazes de perceber uma regularidade, mas não de explicitá-la. Daí a importância de o professor, como mediador entre o conhecimento e os alunos, explorar o vocabulário matemático adequado.

A professora Giancarla também abordou a organização de "filas" com os alunos da educação infantil. No entanto, em parceria com a professora da turma, criou uma história, um contexto lúdico que envolveu as crianças, e o *segredo* da fila, em cada uma das etapas da história, foi reconhecido pelos alunos. Ao final, ela também explorou o registro das crianças, que ali mostraram compreender o que é uma sequência. Como uma das conclusões do grupo, Giancarla traz em sua narrativa que o registro só deve ser solicitado aos alunos se ele produzir sentidos para a criança, e foi o que aconteceu, pois as crianças registraram os contextos da história, bem como as organizações das filas.

O que podemos concluir dessas três narrativas? Conforme discutimos em trabalho anterior (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018), na perspectiva histórico-cultural, pensamento e linguagem são processos indissociáveis. Como afirma Radford (2014), o pensamento se compõe por meio de ferramentas culturais, produzidas historicamente, sempre mediadas pelos signos, e o papel do professor é fundamental nesse processo. Os questionamentos, as intervenções e as mediações do professor precisam contribuir para que o aluno desenvolva a capacidade de observar, perceber detalhes, semelhanças e diferenças entre os objetos, bem como utilizar-se de gestos para expressar aquilo que está sendo percebido. Muitas vezes, falta à criança a palavra adequada para expressar seu pensamento. Nesse caso, ela pode utilizar-se de gestos, e estes também fazem parte do processo de elaboração conceitual; muitas vezes, um gesto revela uma elaboração sofisticada que a criança está realizando (RADFORD, 2012). Ela inicia seu processo de construção do pensamento algébrico lançando mão de múltiplas linguagens, as quais precisam ser percebidas e estimuladas pelos professores. Nas narrativas aqui apresentadas, as professoras buscaram fazer essa mediação em sala de aula; aquelas que não foram bem-sucedidas num primeiro momento, foram analisadas, refletidas e enriquecidas em momentos posteriores. Isso evidencia o quanto o professor aprende no ato de ensinar.

Para Mason (2007), o processo de análise e de abstração pressupõe que a criança se fixe em determinados atributos de um objeto em detrimento de outros, num movimento de focar e desfocar. As crianças, desde pequenas, aprendem a discernir detalhes naquilo que escutam ou veem. Para ele, a capacidade de distinguir objetos ou características do objeto é que possibilita a própria aquisição da linguagem. O professor precisa se colocar à escuta da criança, ouvir o que ela está identificando num certo contexto – por exemplo, se está buscando construir uma sequência de repetição com materiais manipuláveis, o que a leva a sequenciar os objetos numa determinada ordem – e não se apegar àquilo que havia sido previsto para a tarefa. Colocando-se à escuta da criança, o professor pode avaliar a potencialidade da tarefa, bem como os modos como a conduziu.

Em síntese, na educação infantil, tarefas voltadas à construção do conceito de sequência, base para o desenvolvimento do pensamento algébrico, devem priorizar o lúdico, a imaginação e o corpo como um todo.

Nossas expectativas com relação aos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental também eram grandes, já que a literatura internacional já evidenciava generalizações com alunos dessa faixa etária (MESTRE, 2014). Analisando a narrativa de Cidinéia, que propôs a tarefa com tiras de números coloridos a alunos do 3.º ano do ensino fundamental, observamos sinais de que os alunos conseguem generalizar o motivo da sequência; relacionam os números pares e ímpares às cores; fazem contagem de 10 em 10; e utilizam letras para representar simbolicamente as três cores que compõem a fita.

Na narrativa de Kátia que propõe a alunos do 1.º ano do ensino fundamental as tarefas "As estripulias de Pedrinho", "Sequências de piões" e "As estripulias de Pedrinho com as fotos de suas amigas", constatamos também que os alunos identificam o padrão repetitivo na sequência, utilizam termos próprios da linguagem matemática (sequências, repetição, ...), utilizam números para representar o padrão representado pelas figuras; e um dos alunos tenta estabelecer relações entre a posição das figuras e o número registrado. A mesma tarefa foi proposta aos alunos do 3.º ano.

Na narrativa de Carla, que traz um recorte do processo de sua pesquisa com alunos do

4.º ano do ensino fundamental, constatamos que tarefas investigativas de padrões matemáticos contribuem para a argumentação em sala de aula e para as trocas de ideias; a postura do professor ajuda na construção desse diálogo; e os alunos criam sequências com padrões.

Com alunos dos anos finais do ensino fundamental, acreditávamos que as percepções de regularidades e generalizações ocorressem de forma mais elaborada. Analisando a narrativa de Cláudia, percebemos generalização dos alunos para a tarefa das carinhas, que consistia num padrão de cinco elementos, duas carinhas tristes e três alegres, explorando a ideia de razão (2 para 5 e 3 para 5). A mesma tarefa foi desenvolvida do 6.º ao 8.º ano. Segundo a autora, em todas as turmas, a maioria dos alunos chegou à generalização, fazendo a contagem de cinco em cinco, sem necessitar de cálculos mais elaborados. No entanto, chamou sua atenção um grupo do 8.º ano que partiu da contagem de dez em dez, sem dificuldades para responder a todos os itens propostos. Essa narrativa apresenta, também, o movimento do grupo diante de uma tarefa que gera discussões em sala de aula. Cláudia conta: "entendo que as turmas que fizeram a tarefa progrediram em suas habilidades de comunicação e de registro. Acrescento a isso o envolvimento dos alunos com a tarefa, que foi significativa para eles". Alguns de seus alunos apresentaram dúvidas quanto aos enunciados da tarefa e, quando ela trouxe para discussão no Grucomat, optamos por reformulá-los, evidenciando a importância da metodologia pautada em *design research*.

Na narrativa de Jaqueline, referente ao trabalho, num 7.º ano, com três tarefas do fio de contas (a primeira tinha como padrão uma conta azul e uma vermelha; a segunda, uma conta azul e duas vermelhas; e a terceira seria uma criação dos próprios alunos), estão evidentes diferentes formas de generalização dos alunos. Na primeira tarefa, eles relacionaram, sem dificuldades, as cores azul e vermelha com números ímpares e pares; na segunda, as estratégias de generalização foram mais diversificadas: calcular de conta a conta; ir contando de 3 em 3; subtrair 12 do número que se pede; basear-se nos múltiplos de 12; e analisar o resto da divisão por 3, compreendendo que o quociente da divisão não interfere na cor da conta, por se tratar do número de elementos do padrão). A professora também notou que os alunos articularam diferentes formas de registro, como desenhos e símbolos. Segundo ela,

> *as problematizações geradas pelas tarefas permitiram que o processo de elaboração conceitual e o pensamento algébrico fossem emergindo em um movimento entrelaçado, um (re) significando o desenvolvimento do outro. Nos discursos e nos registros dos alunos, a linguagem falada pode ser considerada um recurso importante para a estruturação da linguagem simbólica e, nesse contexto, da linguagem sincopada, uma forma simplificada de escrita, considerada importante. (Narrativa Jaqueline)*

A professora Kelly também trabalhou com seus alunos do 7.º e 8.º anos duas tarefas do fio de contas, e acrescentou outras não elaboradas pelo Grucomat. Assim como as professoras que a precederam neste texto, ela constatou que, enquanto alguns alunos ainda faziam contagem, outros já utilizavam a ideia de divisibilidade em sequências com determinado número de elementos no padrão e trabalhavam com o resto para identificar a cor. Diferentemente das outras professoras, no entanto, ela sugeriu aos alunos a utilização de tabelas para registrar os elementos conhecidos do padrão e buscar por uma lei de generalização. Nesse caso, as tabelas são importantes ferramentas pedagógicas (HIEBERT *et al.*, 1997), como forma de organização do raciocínio. Ela também constatou que, no 8.º ano, mesmo os alunos já tendo mais familiaridade com álgebra, eles, inicialmente, apresentaram dificuldades de escrever a lei de formação. Eis as reflexões que a autora produziu em sua narrativa:

> *Quando fui para a sala de aula desenvolver as atividades com os alunos do 7.º ano, tudo transcorreu muito bem; porém, a primeira atividade que tentei fazer no 8.º ano foi um fracasso. Atribuo isso a mim mesma, pois, ao ver a videogravação, percebi que minhas intervenções, ou melhor, minhas falas, na intenção de ajudá-los, fizeram com que eles, que já estavam confusos, ficassem ainda mais perdidos. [...] Essa atividade fez com que eu olhasse para as aprendizagens dos alunos e também para minha própria. Voltei-me para meu próprio desenvolvimento profissional e vi que estou sempre aprendendo com meus próprios alunos, com a visualização de minha aula videogravada, com minha própria experiência. (Narrativa de Kelly)*

Igualmente significativas foram as generalizações por alunos da Educação de Jovens e Adultos, conforme narrativa de Raquel. Ela trabalhou numa turma que não era sua, mas disponibilizada por uma colega para a realização das tarefas. Ela utilizou a primeira tarefa do fio de contas (embora sem distribuir o material manipulável aos alunos) e a tarefa das fitas coloridas – a mesma desenvolvida pela professora Cidinéia. A tarefa do fio de contas causou estranhamento nos alunos, pois não enxergavam nela uma situação matemática, não havia cálculos a fazer. Diferentemente das outras professoras, por não se tratar de seus alunos e pelos estranhamentos com a tarefa inicial, ela precisou discutir com eles o significado da palavra "padrão", o conceito de regularidade e repetição, trazendo-nos evidências da importância de que a tarefa produza sentidos para os alunos. Para a tarefa de tiras coloridas, os alunos da EJA, assim como os do Fundamental II, recorreram a exemplos com números muito grandes, na tentativa de provar que compreenderam a regularidade. Segundo a autora:

> *Os registros da tarefa da fita com duas cores mostraram que a atividade se constituiu em um desafio importante e que a maioria dos alunos conseguiu perceber a regularidade. Alguns desses registros indicam também como eles se arriscaram, conseguindo elaborar interessantes observações, estabelecer associações com outros conteúdos, desafiando-se com questões, ao se depararem com o significado e a classificação do "Zero" quando iniciaram a escrita de números maiores. É necessário compreender o quanto foram cuidadosos no registro de um número maior. (Narrativa de Raquel)*

Do grupo, apenas a professora Rosangela atuava no ensino médio. Ela apresenta em sua narrativa, a partir do trabalho com alunos do 2.º ano do ensino médio, análise de tarefas retiradas do banco de questões da Obmep, por ela sequenciadas de forma que os alunos pudessem avançar no processo de generalização, pois, mesmo a turma já tendo passado pelo estudo de álgebra, a professora queria se certificar de que tarefas envolvendo padrões fossem do seu conhecimento. À medida que as tarefas avançavam ela foi se surpreendendo com a capacidade de percepção de regularidades, algumas nem previstas por ela. Nesse processo, suas intervenções foram fundamentais para ajudar os alunos a compreenderem as equivalências entre as fórmulas elaboradas. Ela também se surpreendeu com a capacidade de articulação com conceitos já trabalhados (como Progressão Aritmética e Geométrica e Proporcionalidade) e com o uso de tabelas na elaboração das leis de formação. Mas também relata as dificuldades encontradas por alguns alunos, evidenciando que o tempo de aprendizagem dos alunos é diferente, pois cada um traz uma bagagem conceitual para a sala de aula, e o professor precisa saber orquestrar essas diferenças. Nesse momento, mediações da professora são necessárias. Ela também relata que as dificuldades para esse tipo de tarefa foram sendo superadas à medida que as atividades avançavam. Conforme ela relata:

> *[...] foi uma experiência nova para os alunos envolvidos, no que se refere à organização da sala, à natureza das tarefas e às ações desenvolvidas tanto por eles quanto por mim. Trabalhar em grupos, registrar estratégias de resolução e comunicá-las com outros alunos não fazia parte da cultura de aula de Matemática com a qual estavam acostumados. Entretanto, eles se envolveram de forma significativa com as tarefas. Com relação a minha expectativa de que não tivessem tantas dificuldades com o desenvolvimento das tarefas propostas e fizessem generalizações, posso dizer que nem todos os grupos conseguiram identificar regularidades, estabelecer relações e representá-las algebricamente. Desse modo, a mediação foi necessária em vários momentos. Ressalto a importância dessa ação para o desenvolvimento do pensamento algébrico, para o registro e a comunicação das diferentes estratégias de resolução e para a percepção dos alunos relativa à equivalência entre leis de formação. (Narrativa de Rosangela)*

As sínteses aqui apresentadas são indicativas de o quanto um trabalho direcionado ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes é necessário desde os anos iniciais. Em algumas narrativas foi possível perceber que os processos de generalização dos estudantes se assemelham, independentemente do ano que estão cursando.

UMA PALAVRA FINAL

Neste capítulo buscamos sistematizar os principais resultados apontados nas narrativas das 11 professoras que produziram seus textos para esta coletânea. Os indícios aqui revelados são fruto de nossas lentes teóricas e analíticas; outros poderão ser detectados pelo leitor.

Concluímos a obra com a certeza de que, desde o início da escolarização, os alunos são capazes de perceber regularidades em padrões e de produzir generalizações, por diferentes estratégias. No entanto, a natureza das tarefas e o papel mediador do professor em sala de aula são essenciais para a garantia do processo. Os resultados deste trabalho corroboram as pesquisas tomadas como referência (HIEBERT *et al*., 1997; MASON, 2007; RADFORD, 2012, 2014, dentre outros).

No que diz respeito ao Grucomat, este cada vez mais se consolida como espaço de formação e produção de conhecimentos, caracterizando-se como uma comunidade de investigação. Nele, as aprendizagens são recíprocas: especialistas (professores de matemática) e pedagogos se ajudam e há um ambiente de compartilhamento. O professor, mesmo não sendo um especialista na área de matemática, mas que participa de um grupo onde há estudos e uma metodologia sistemática de trabalho, produz saberes e sente-se confiante para arriscar-se em sala de aula. O envolvimento das pedagogas no grupo e os modos como elas exploram as tarefas em sala de aula com seus alunos evidenciam o quanto o grupo lhes dá a segurança necessária para arriscar-se a ensinar-lhes novos conteúdos. Como elas detêm um amplo repertório de saberes didático-pedagógicos (organizar a sala de aula para o trabalho; problematizar com os alunos, promover mediações; e socializar e sistematizar as ideias dos alunos), os saberes específicos da matemática são agregados a esse repertório e os resultados se revelam nas aprendizagens dos alunos, principalmente no que diz respeito à argumentação matemática. Os professores especialistas, por outro lado, deixam ver como passam a ter outro olhar para as suas práticas, os modos de organização de sala e as problematizações que podem ser feitas.

No entanto, esse trabalho só é possível se houver o registro por parte do professor. Para nós, a narrativa de prática tem sido considerada como o registro ideal do professor, um modo de sistematização e reflexão da própria prática. Essa narrativa precisa ser compartilhada, discutida, reescrita, quando necessário. As 11 narrativas que aqui comparecem constituem pesquisas da própria prática dos professores participantes do Grucomat.

Este foi um trabalho envolvente e apaixonante, o que pode ter comprometido nosso olhar retrospectivo. No entanto, como toda obra, as ideias aqui contidas refletem o momento em que estávamos vivendo, nossos estudos e compreensões sobre o pensamento algébrico. Portanto, uma obra sujeita a críticas, reflexões, ressignificações.

REFERÊNCIAS

BAKHTIN, Michael. *Estética da criação verbal*. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental.* Brasília, DF: 2012.

COCHRAN-SMITH, Marilyn; LYTLE, Susan L. Relationships of knowledge of practice: teacher learning in communities. *Review of Research in Education,* Washington, 24, p. 249-305, 1999.

COLINVAUX, Dominique. Aprendizagem e construção/constituição de conhecimento: reflexões teórico-metodológicas. *Pro-Posições,* v. 18, n. 3 (54), p. 29-51, set./ dez. 2007.

HIEBERT, James et al. *Making sense:* teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997.

JAWORSKI, Barbara. Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development. In: KRAINER, K.; WOOD, T. (ed.). *Participants in mathematics teacher education:* individuals, teams, communities and networks. The international handbook on mathematics teacher education (v. 3). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher, 2008. p. 309-330.

LUCIO, Claudia C. Bredariol; NACARATO. Narrativas de aula como práticas de letramento docente. In: NACARATO, Adair Mendes; FREITAS, Ana Paula.; ANJOS, Daniela D.; MORETTO, Milena. (org.). *Práticas de letramento matemático nos anos iniciais*: experiências, saberes e formação docente. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2017. v. 1, p. 45-75.

MASON, John. Making use of children' powers to produce algebraic thinking. In: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D.W.; BLANTON, M. L. (ed.). *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates; NCTM, 2007. p.57-94.

MESTRE, Célia Maria Martins Vitorino. *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade:* uma experiência de ensino. 2014. 379p. Tese (Doutorado em Educação Didática da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida. *O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica:* compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. 1. ed. Brasília: SBEM, 2018. Livro eletrônico. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf. Acesso em: 23 fev. 2019.

NACARATO, Adair Mendes; GRANDO, Regina Célia (org.). *Estatística e Probabilidade na Educação Básica:* professores narrando suas experiências. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

RADFORD, Luis. On the development of early algebraic thinking. *PNA,* UK, v. 6, n. 4, p. 117-133, 2012. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/12342220.pdf. Acesso em: out. 2017.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, L. *et al*. (ed.). *Investigación en didáctica de la matemática:* homenaje a Encarnación Castro. Granada, Espanha: Comares, 2013. p. 3-12.

RADFORD, Luis. The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal,* Australia, n. 26, p. 257-277, 2014.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa (coord.). *Padrões em matemática:* uma proposta didática no âmbito do novo programa para ensino básico. Amadora: Texto, 2011.

SOBRE OS AUTORES

Adair Mendes Nacarato

Licenciada em Matemática pela PUC-Campinas, Mestra e Doutora pela FE/Unicamp. Atua no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco, *campus* Itatiba, na linha de pesquisa Educação Sociedade e Processos Formativos. É líder dos grupos de pesquisa Histórias de Formação de Professores que Ensinam Matemática (Hifopem) e Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat). E-mail: ada.nacarato@gmail.com

Arthur B. Powell

Graduado em Matemática e Estatística pela Hampshire College (1976), Mestre em Matemática pela University of Michigan (1977) e Doutor em Educação Matemática pela Rutgers University (2003). Atualmente é Professor Titular de Educação Matemática no Departamento de Educação Urbana no campus de Newark da Rutgers University (New Jersey). É diretor Associado e pesquisador do Robert B. Davis Institute for Learning of the Graduate School of Education. Coordena o Grupo de Pesquisa sobre Comunicação, Tecnologia e aprendizagem matemática da Rutgers University que está empenhado em um projeto investigativo e educativo denominado eMath e um outro projeto sobre Medição e Números Racionais. E-mail: powellab@newark.rutgers.edu

Caio Leardini Grillo

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Realizou intercâmbio na Indiana University (EUA) através do programa de graduação sanduíche pela CAPES. Atualmente é professor de Matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio da rede SESI/SP e pertence ao Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat) vinculado a USF. E-mail: grillo.caio@gmail.com

Carla Cristiane Silva Santos

Pedagoga e Mestre em Educação pela Universidade São Francisco, *campus* de Itatiba. Defendeu a dissertação de Mestrado no Programa Obeduc, com o tema: “O pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: a percepção de regularidades e o pensamento relacional", na linha de Pesquisa Educação, Sociedade e Processos Formativos. Participa do Grucomat/USF. Atualmente é professora efetiva na rede SESI de Itatiba-SP num 2º Ano do Ensino Fundamental. E-mail: carlinha_ipda@hotmail.com

Claudia Cristiane Bredariol Lucio

Doutora em Educação pela Universidade de São Francisco – SP. Mestre em Educação e graduada em Ciências/ Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia – UFU – MG. Professora Titular da carreira de Ensino Básico Técnico e Tecnológico na Eseba - Colégio de Aplicação da UFU. Desenvolve atividades de ensino, pesquisa e extensão com estudantes jovens e adultos; atividades de co-cordenação e orientação no Grupo de Estudos e Pesquisas em Inovações Tecnológicas (GEPIT)- de 2016 a 2018. Integra o Núcleo de Estudos e Pesquisas na Educação de Jovens e Adultos (NEPEJA), o Grupo de Estudo e Pesquisa para o Ensino e a Aprendizagem em Educação Matemática GEPEAEM e Grupo Colaborativo: insubordinação Criativa em Matemática (ICEM). E-mail: cacaubreda@yahoo.com.br

Cidinéia da Costa Luvison

Doutora em Educação pela Universidade São Francisco (USF). Mestre em Educação pela mesma Universidade. Licenciada em Pedagogia pela Faculdade do Noroeste de Minas e História pela Fundação Municipal de Ensino Superior de Bragança Paulista – FESB. Possui Pós-graduação *Lato Sensu* em Educação Especial, Psicopedagogia e Gestão Educacional. Professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental na rede municipal de Bragança Paulista-SP, de História na rede estadual de ensino e professora do Ensino Superior na graduação e pós-graduação no Instituto de Ensino Superior de Itapira – IESI. E-mail: cidineiadacosta.luvison@gmail.com

Daniela Dias dos Anjos

Graduada em Pedagogia, Mestre e Doutora em Educação, pela Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Tem experiência na área de Educação como professora da educação básica e do ensino superior. Atualmente é docente do Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco (USF), e atua na linha de pesquisa Educação, Sociedade e Processos Formativos. E-mail: daniela.anjos.prof2015@gmail.com

Giancarla Giovanelli de Camargo

Mestre em Educação pela Universidade São Francisco, Especialista em Matemática para professores da educação Infantil e séries iniciais pelo Imecc/Unicamp, graduada em Letras pela Universidade São Francisco e em Pedagogia pela Unifia. Integrante do Grucomat desde 2012. Atua como Diretora de Escola e Formadora de Professores em Itatiba, SP. E-mail: giangiovanelli@gmail.com.br

Iris Aparecida Custódio

Doutoranda do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco. Mestra em Educação pela mesma universidade na linha de pesquisa Educação, Sociedade e Processos Formativos. Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Lavras. Foi bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) e participou do Programa Observatório da Educação (Obeduc). Atualmente pertence aos grupos: Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat) e Histórias de Formação de Professores que Ensinam Matemática (Hifopem), ambos vinculados a USF. E-mail: irisapcustodio@gmail.com

Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Doutora e mestre em Educação pela Universidade São Francisco (USF/Itatiba). Graduada em Ciências/Matemática e Pedagogia pelo Centro Universitário Amparense. Professora do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Centro Acadêmico do Agreste- Campus Caruaru/PE. Tem experiência como professora em diferentes níveis de ensino, atua em pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de Matemática, Educação Matemática Inclusiva e Formação de Professores. Faz parte do Grupo de Estudos e Pesquisas em Ensino e Aprendizagem de Matemática (GEPEAM) - UFCG, do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório - Geração (UFPE) e do Grupo Colaborativo: Insubordinação Criativa em Educação Matemática (ICEM). E-mail: jaquelisantos@ig.com.br

Juliana Bagne

Graduada em Pedagogia. Possui Especialização na área de gestão escolar e coordenação pedagógica. É mestra em educação pela Universidade São Francisco e possui publicações a respeito das problematizações nas aulas de matemática nas séries iniciais. Iniciou na educação em 2000. Enquanto professora atuou na educação infantil e no ensino fundamental I tanto na rede particular como na rede pública de ensino. É professora efetiva do Município de Jundiaí desde 2006 e a partir de 2011 atua na função de coordenadora pedagógica no segmento da educação infantil. E-mail: bagnej83@gmail.com

Kátia Gabriela Moreira

Graduada em Pedagogia. É mestra em educação pela Universidade São Francisco; e atualmente é doutoranda em Educação pela Universidade São Francisco. Enquanto professora atuou na educação infantil e no ensino fundamental I tanto na rede particular como na rede pública de ensino. É professora efetiva do Município de Nazaré Paulista desde 2013 e a partir de 2019 atua na função de coordenadora pedagógica no segmento da educação infantil. E-mail: ktiagabriela@hotmail.com

Kelly Cristina Betereli

Licenciada em Matemática e mestre em Educação pela Universidade São Francisco. É docente na Universidade São Francisco, ministrando aulas de Álgebra e Cálculos e também atua como autora de material didático de matemática para o 3º ano do Ensino Fundamental I, do Sistema PH. E-mail: beterelike@gmail.com

Marjorie Samira Ferreira Bolognani

Possui graduação em pela Pontifícia Universidade Católica – SP; mestrado e doutorado em Educação pela Universidade São Francisco. Atualmente é diretora educacional da Prefeitura Municipal de Jundiaí e professora convidada do Centro Universitário de Jaguariúna-SP, nos cursos de Pós-Graduação à docência. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em direção educacional, coordenação pedagógica e formação de professores em serviço. É avaliadora da Revista Horizontes. É membro dos grupos de pesquisa: Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat) e Histórias de Professores que Ensinam Matemática (Hifopem). E-mail: marjonet@gmail.com

Raquel Fernandes Gonçalves Machado

Professora licenciada em Matemática e mestre em Educação pela Universidade Federal de Uberlândia- UFU - MG, doutora em Educação pela Universidade São Francisco- SP. Professora titular efetiva da carreira de Ensino Básico Técnico e Tecnológico - UFU. Desenvolve atividades de ensino, pesquisa e extensão com estudantes jovens e adultos. Integra os grupos NEPEJA e GEPPROFEM, participa na coordenação do GEPIT. E-mail: raquelfgmac@ufu.br

Rosangela Eliana Bertoldo Frare

Doutora em Educação pela Universidade São Francisco. Mestre em Educação pela mesma Universidade. Graduada em Matemática pelas Faculdades Integradas de Amparo. Participa do Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat) desde 2014. É professora efetiva da rede pública de ensino estadual paulista e atualmente está designada como vice-diretora de escola da mesma rede. E-mail: robertoldo81@hotmail.com

Selma Nascimento Vilas Boas

Doutoranda em Educação pela Universidade São Francisco. Licenciada em Pedagogia pela Faculdade Padre Anchieta. Mestre em Educação pela Universidade São Francisco. Pós-graduação Lato Sensu em Psicopedagogia clínica e institucional (Instituição Faculdades Padre Anchieta), Construtivismo e Educação (Instituição Faculdad Latinoamericana de Ciências Sociales – Flacso), Gestão Escolar (Instituição Instituto Japi) e Educação Especial (Instituição Faculdades Faccat). Já atuou como professora, diretora de escola e supervisora escolar no segmento da Educação Infantil. Atualmente é Coordenadora Pedagógica na Emeb Aparecida Bernardi do Amaral, escola que atende crianças da faixa etária de 3 a 5 anos. Participa do GRUCOMAT (Grupo Colaborativo em Matemática).

SBEM