



FRACTAIS DE BASES CALEIDOSCÓPICAS

Autores: Flavio Roberto Gouvêa

Unesp Rio Claro e-mail: frgmat@ig.com.br

Prof. Dr. Claudemir Murari

Unesp Rio Claro e-mail: murari@linkway.com.br

INTRODUÇÃO

Nosso interesse no ensino-aprendizagem da geometria vem do fato de estarmos trabalhando, nos últimos anos, com alunos do ensino fundamental e médio tendo sempre nos defrontado com as dificuldades que os mesmos têm para entender esse campo do saber. Sabemos que muitos fatores contribuem para isso. Um deles é o modo pelo qual a geometria tem sido abordada, privilegiando o modo dedutivo ao invés do indutivo.

Diante disso, apresentamos um trabalho que envolve fractais, caleidoscópios e software de geometria dinâmica que podem ser explorados em sala de aula proporcionando uma abordagem diferente de alguns conceitos de geometria.

Os fractais e os caleidoscópios proporcionam ao aluno contemplar a beleza da geometria presente no cotidiano e no mundo que o cerca. Os fractais de bases caleidoscópicas podem ser obtidos com o auxílio do software Cabri Géomètre II.

Encontramos nesse software educacional recursos ideais para as construções de bases fractais, pois o Cabri Géomètre II é um ambiente computacional interativo que permite a construção e exploração de objetos geométricos de forma intuitiva, tais como: pontos, linhas, segmentos, triângulos, polígonos e círculos. Além de possuir uma interface fácil e aprazível, possibilita construir macro, medir ângulos, segmentos, áreas de figuras, entre outros procedimentos.

COMO OBTER FRACTAIS DE BASES CALEIDOSCÓPICAS?

Para um melhor entendimento dos procedimentos para obter fractais de bases caleidoscópicas há necessidade de discorrermos, a seguir, alguns temas aqui tratados.

Um conjunto de espelhos pode ser considerado como caleidoscópio desde que permita a obtenção repetida e perfeita de imagens. Esse termo será empregado, neste trabalho, quando fizermos referência a dois, três ou quatro espelhos planos, articulados e perpendiculares a um plano, conforme o sentido aplicado por Alsaugh (1972).

Os caleidoscópios educacionais são de fácil construção; detalhes podem ser obtidos em Murari (1999). Para visualização de pavimentações, tais caleidoscópios necessitam de que sejam colocadas em seu interior figuras adequadamente construídas. Essas figuras são designadas por vários termos: *base substituível*, *base geradora*, *base transformada*, *padrão-básico*, *triângulo-básico*, *figura-base*, todos se referindo a uma região triangular ou quadrangular construída, através da qual observamos nos Caleidoscópios as pavimentações. Definimos como “base geradora” aquela que não contém propriamente nenhuma outra base substituível; enquanto que “base transformada” é aquela base substituível que provem de uma base geradora.

A notação de uma pavimentação por polígonos regulares representa os polígonos que a geram, na ordem em que aparecem ao redor dos vértices. Assim, por exemplo, a configuração (4,4,4,4) significa que em cada nó ou vértice temos quatro quadrados. Outras pavimentações envolvem polígonos regulares distintos, como é o caso da configuração (4,6,12), cuja notação significa que ao redor de cada vértice teremos um quadrado, um hexágono regular e um dodecágono regular.

Ball e Coxeter (1987), demonstra que com três espelhos, para ângulos da forma $\frac{\pi}{n}$ tem-se a necessidade de se ter soluções inteiras e positivas na equação $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onde n, m e q são inteiros diferentes de zero, para obter-se a reprodução perfeita de imagens no caleidoscópios sendo ainda n, p e q, os quocientes de 180° pelos ângulos a, b e c dos espelhos. Como consequência, obtemos as ternas que são soluções da equação: (3,3,3); (2,3,6); (2,4,4); então, temos, respectivamente, apenas três tipos de caleidoscópios: Equilátero (60°,60°,60°), Escaleno (90°,60°,30°) e Isósceles (90°,45°,45°).

Entre outros objetivos, os caleidoscópios podem ser utilizados para desenvolver a percepção espacial, habilidades gráficas, estimular a criatividade, motivar o estudo e exploração de propriedades de polígonos e de simetria reflexional das transformações geométricas, ampliar o campo de atividades educacionais com relação às pavimentações de plano. Segundo Grunbaum e Shephard (1989) são 11 as pavimentações *1-uniforme* do plano com polígonos regulares e as *2-uniformes* são em número de 20.

Ball e Coxeter (1987) ainda indicam as oito pavimentações 1-uniforme visualizadas nos caleidoscópios com três espelhos.

- Caleidoscópio Equilátero (3,3,3,3,3,3); (3,6,3,6) e (6,6,6)
- Caleidoscópio Isósceles (4,4,4,4); (4,8,8)
- Caleidoscópio Escaleno (3,12,12); (3,4,6,4) e (4,6,12); além das mesmas obtidas no caleidoscópio equilátero.

No interior do triângulo abaixo são construídos segmentos formando regiões, as quais vão produzir, nas reflexões dos espelhos, a pavimentação do plano desejado.

Porém, o número de imagens fornecidas dependerá do ângulo de abertura dos espelhos. Um estudo do número de imagens em espelhos pode ser encontrado em Murari (1999).

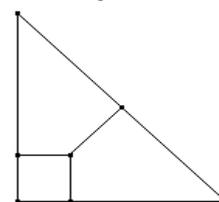


Fig. 1

As regiões das bases substituíveis delimitadas pelos segmentos podem ser coloridas para posteriormente visualizar os polígonos coloridos, o que torna este estudo enriquecedor.

Vemos na figura abaixo uma base do caleidoscópio isóscele retângulo, que fornecerá o visual de uma pavimentação de configuração (4,8,8).

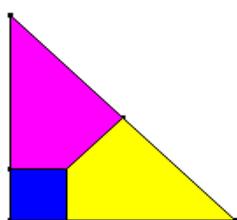


Fig.2



Fig.3



Fig.4

CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO DE UMA BASE GERADORA DA PAVIMENTAÇÃO (4,6,12)

Para construirmos a base ao lado, com régua e compasso, é necessário construir três bissetrizes da base eqüilátera. Por D , um dos pontos médios dos lados, construir semi-retas inclinadas a 45° , determinando nas outras duas bissetrizes os pontos E e F . Baixar perpendiculares aos dois lados mais próximos da base eqüilátera. Ficarão formadas quatro regiões que poderão ser coloridas com quatro cores, indicadas na figura por x, y, k, w .

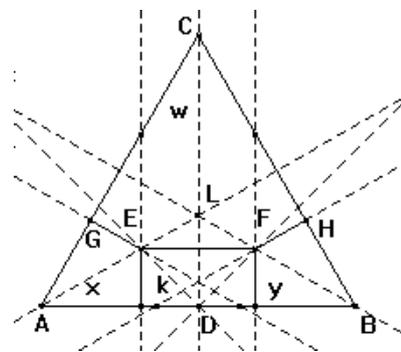


Fig.5

Esta base gera uma pavimentação com 2 tipos de nós, cada um com 3 cores, onde todos os dodecágonos serão de cor w e todos os quadrados de cor k , enquanto os hexágonos terão cores x e y ; ver figura.6. Temos em cada nó (vértice) um quadrado, um hexágono regular e um dodecágono regular, cujo visual é gerado em caleidoscópios eqüiláteros



Fig.6



Fig.7

DETERMINAÇÃO DE BASES E SUAS TRANSFORMADAS: UM MÉTODO

Em Murari (1999), temos o seguinte:

Kingston chama a atenção para a existência de pavimentações que apresentam simetrias reflexionais em relação às mediatrizes dos lados dos polígonos.

Baseados nesse fato, propomos um novo método: linha(s) de simetria de uma pavimentação que é (são) também linha(s) de simetria de um ou mais polígonos distintos (configurações monoedrais ou poliedrais, conforme o caso) dessa pavimentação, formarão “redes” de triângulos congruentes com os mesmos padrões de segmentos de reta formados em cada triângulo da tal rede.

Tais segmentos podem ser provenientes dos lados dos polígonos que compõem a configuração, isto é, conterão segmentos (múltiplos) de lados

(um ou mais) de polígonos que formam a pavimentação ou parte das linhas de simetria da pavimentação. Descobrimos, numa porção da pavimentação, triângulos equiláteros (para configurações: (3,3,3,3,3,3), (3,12,12), (4,6,12), (3,4,6,4), (6,6,6) e (3,6,3,6)) e isósceles (para configurações: (4,4,4,4) e (4,8,8)), formados pelas linhas de simetrias das redes, teremos, então, reveladas as bases para pavimentações do plano. (p.131).

Conforme o exemplo da pavimentação de configuração (4,6,12):

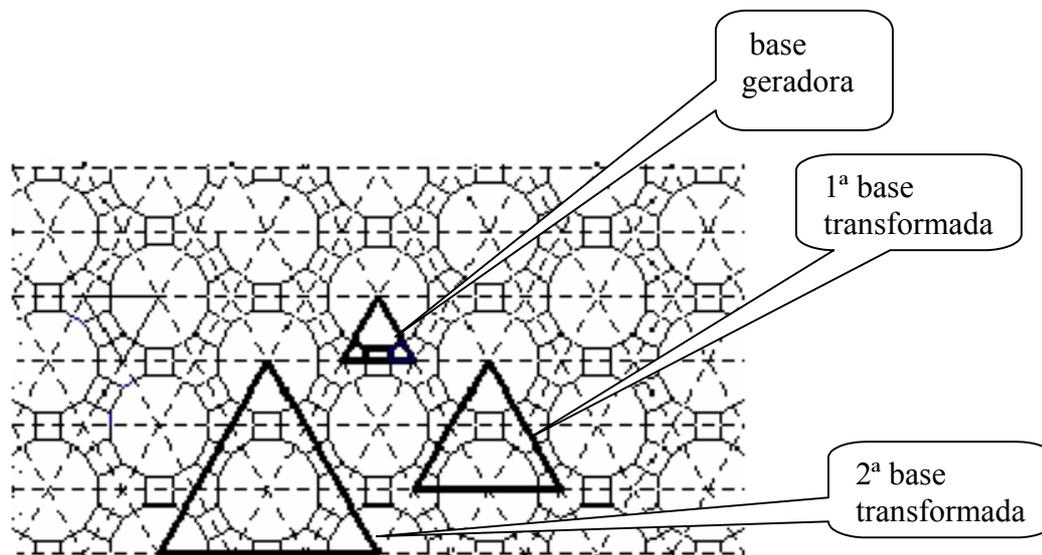


Fig.8

OS FRACTAIS

Podemos considerar os Fractais como formas que se caracterizam por repetir um determinado padrão (auto-similaridade). Em consequência da auto-similaridade, quando vistas através de uma lente de aumento, as diferentes partes de um fractal se mostram similares à forma como um todo.

Os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita.

Segundo Barbosa (2002), Mandelbrot usou para definir fractal conceito de dimensão: *um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.*

É claro que essa “definição” recebeu críticas e também não satisfazia ao próprio Mandelbrot. J. Feder (1998), considerou como razoável uma caracterização de Mandelbrot para que não fosse excluído alguns objetos da física considerado fractais: - *um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.*

K.J. Falconer, autor de duas obras importantes sobre fractais (1985 e 1990), sugeriu o entendimento de fractal por caracterizações: Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- F possui alguma forma de “auto-similaridade”, ainda que aproximada ou estatística;
- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que sua dimensão topológica;
- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.

OBTENDO O FRACTAL

Mostraremos a seguir uma maneira de como construir um fractal a partir de uma base caleidoscópica. Vamos considerar a base da figura 5 para fazermos iterações (bases transformadas) dando origem a um fractal.

A construção dessas bases foi realizada através do software Cabri-Géomètre II, usando macro que é um recurso que possibilita memorizar uma seqüência de construções que podem ser reproduzidas instantaneamente. Esta seqüência de construção é chamada de macroconstrução.

A utilidade de uma macro surge, quando há necessidade de se construir uma figura várias vezes, como no caso das bases caleidoscópicas. Apresentamos, a seguir, a construção por macro da base da figura 5. Observe que os botões principais para efetuar as construções estarão informados entre parênteses.

a) Construir um triângulo equilátero ABC.

-Criar um segmento (terceiro botão), nomeando-o de AB (décimo botão **Rótulo**).

-Criar duas circunferências uma no ponto A e outra no ponto B com raio do tamanho do segmento. Crie o ponto de intersecção destas duas circunferências. Há uma opção para isto no segundo botão da caixa de ferramenta (**intersecção de dois objetos**) nomeie este ponto de C.

-Clicar no décimo primeiro botão da caixa de ferramentas e selecionar a opção **Esconder/Mostrar** para esconder as construções auxiliares e ficar somente os pontos A, B e C, que serão os vértices do triângulo desejado.

-Clicar no terceiro botão, para selecionar a opção **polígono**.

Clicar sobre os pontos A, B e C, obtendo o triângulo equilátero.

b) Construir as bissetrizes (quinto botão) dos ângulos \widehat{BAC} , \widehat{ABC} e \widehat{ACB} . No encontro das bissetrizes teremos o ponto L. Criar, também, o ponto D, conforme a figura.

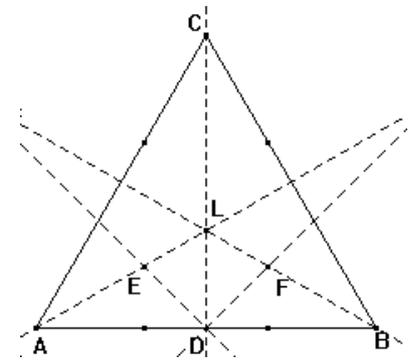


Fig.9

c) Construir as bissetrizes dos ângulos \widehat{LDA} e \widehat{LDB} , para obter os pontos E e F (intersecção de bissetrizes), que deverão ser criados.

d) Construir quatro retas perpendiculares (quinto botão, reta perpendicular) Pelo ponto E trace perpendiculares aos lados AB e AC. Pelo ponto F, perpendiculares aos lados AB e CB. Assim, obtém-se os pontos G, I e J, H, os quais deverão ser criados.)

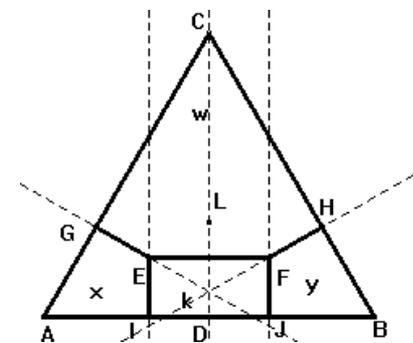


Fig.10

e) Construir os polígonos AIEG, IEFJ, BHFJ e CGEFH (terceiro botão, polígono).

f) Selecionar na caixa de ferramentas a opção preencher. Surgirá na tela uma paleta de cores, onde deve ser selecionada



Fig.11

uma cor para preenchimento de cada objeto criado em (e).

g) Vamos definir uma macro para executar a pavimentação de configuração (4,6,12), através da base da figura 5. Clicar no botão **M**, na figura acima, e selecionar **Objetos Iniciais**. Mover o cursor em direção à figura, até aparecer a mensagem **Este polígono**. Clicar para selecionar o triângulo (ABC) como objeto inicial, o qual terá seu contorno marcado, indicando estar selecionado. Clicar **Objetos Finais, no botão Macro**, e mover o cursor para selecionar os polígonos AIEG, IEFJ, BHFJ e CGEFH como objetos finais.

Após isso, selecionar a opção **Definir Macro**. Aparecerá uma caixa de diálogos, na qual sua macro deverá ser nomeada. Nesse caso, podemos chamá-la de *base (4,6,12)*.

h) Construir um triângulo equilátero. Selecionar (sexto botão) **Simetria Axial**. Mover o cursor em direção à figura até aparecer a mensagem **Este polígono**. Selecionar o triângulo e obter os simétricos em relação aos lados *AC*, *BC* e *AB*. Dessa forma, aparecerão três novos triângulos.



i) Selecionar a macro definida em (g) e clicar sobre os triângulos.

Fig.12

Repetindo o processo de simetria axial e macro, sucessivamente, obteremos a pavimentação de configuração (4,6,12), como mostra a figura 8.

OBTENDO O FRACTAL

As bases transformadas, que ao final darão o fractal, deverão ter a mesma dimensão da base geradora (que deve ser do tamanho do caleidoscópio). O leitor pode observar que o triângulo básico que contém as bases transformadas, foi dividido em triângulos equiláteros menores congruentes (começando por quatro, depois nove, dezesseis, vinte e cinco e trinta e seis triângulos) onde em cada um deles foi utilizada, convenientemente, a macro da base geradora obtida, conforme explicitado acima. Note que a imagem contida no retângulo branco são reduções da base geradora.

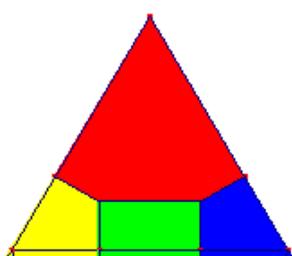


Fig.13

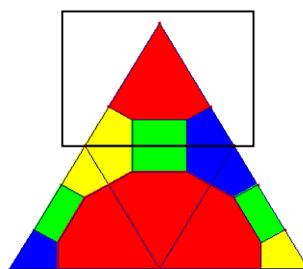


Fig.14

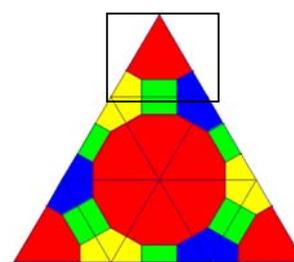
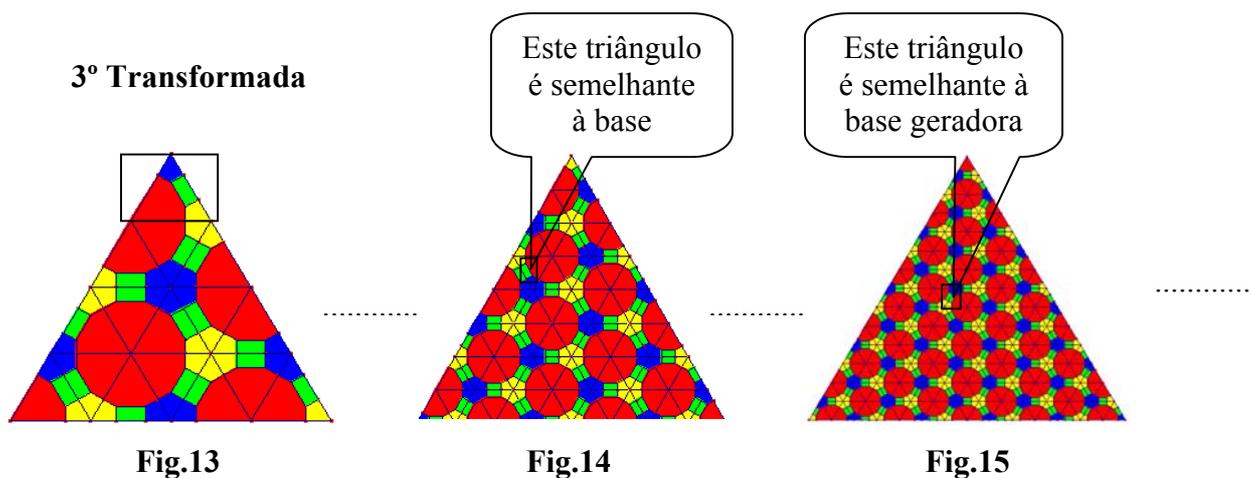


Fig.15

Se continuarmos assim, progressivamente construindo bases transformadas, obteremos um fractal que é uma forma geométrica fragmentada. Cada parte dessas

subdivisões será uma cópia reduzida da forma toda, que no nosso caso, é a base geradora.



Logo, para obtermos um fractal de uma base, basta considerarmos a auto-similaridade. Assim, este processo poderá ser aplicado para obter fractais através de bases geradoras de qualquer pavimentação. Quando obtemos um número n de bases transformadas, qualquer que seja o triângulo retirado dessas bases será semelhante à base geradora.

Vale salientar que todas as bases transformadas, quando colocadas em caleidoscópios, irão fornecer o mesmo visual da pavimentação, que no nosso caso é a de configuração (4,6,12). A diferença entre os visuais oferecidos é o tamanho dos polígonos que formam a pavimentação que, na seqüência das transformadas vão se tornando cada vez menores.

Deve ser ressaltada a importância do software Cabri-Géomètre II, como ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem de Geometria, por oferecer os recursos de macro e simetria de segmentos e polígono, o que representa grande facilidade para a construção das bases substituíveis. À medida que passamos de uma base transformada para outra, vai aumentando o grau de dificuldade nas construções com régua e compasso, além, de ter-se aumentada à margem de imprecisão dos desenhos.

Como o objetivo é construir fractais de base caleidoscópica abordando de maneira inovadora a geometria através dos caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica, não podemos esquecer que estar em um ambiente informatizado, que permite a realização de medidas e deformações das construções geométricas traz mudanças no processo de aprendizagem. Pesquisadores como Borba e Penteadó (2001) tem salientado que:

devemos entender a informática. Ela é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação, e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. (p.46)

Desse modo, acreditamos que existem mudanças significativas no modo de pensar dos indivíduos quando estes produzem conhecimento utilizando uma nova mídia, como o computador. Logo, entendemos que um software de geometria dinâmica como o Cabri-Géomètre II, associado com os caleidoscópios e fractais, podem colaborar para o ensino-aprendizagem de conceitos de geometria.

CONCLUSÃO

Como a geometria euclidiana é de vital importância para a formação cultural e intelectual do educando, acreditamos que atividades utilizando o caleidoscópio, um software de geometria dinâmica e fractais se configuram num eficiente veículo de transmissão de conceitos dessa geometria, de uma forma atraente, de modo que contemple e atenda a interdisciplinaridade (Desenho Geométrico, Desenho Artístico e Geometria Euclidiana) e promova uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos.

Palavras chaves: fractais, bases caleidoscópicas e cabri-géomètre II

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALSPAUGH, C. A., Kaleidoscope Geometry - Arithmetic Teacher, 17 (116 - 117), reprinted in: Readings in Geometry from the Arithmetic Teacher N.C.M (3ª. ed.) 1972.
- BALL, R.& COXETER, M.C.H., Mathematical Recreations and Essays. Univ. Toronto, 1974, republication by Dover, 1987.
- BARBOSA, R. M. Descobrimos a geometria fractal para a sala de aula - Belo Horizonte: Autentica, 2002.
- BORBA, M.C. & PENTEADO, M.G. (2001). Informática e Educação Matemática. 2ª ed., Belo Horizonte: Autêntica.

FALCONER, K.J. The Geometry of Fractals Sets: Cambridge: Cambridge Universitys Press, 1985.

FALCONER, K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, N. Y.: Willey, 1990.

GRUNBAUM, B. and SHEPARD, G.C., Tillings and patters: an introduction, Freeman, N.Y., 1989.

MANDELBROT, B.P. Objetos Fractais. Lisboa: Gradiva, 1998.

MURARI, C., Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7^a e 8^a series, via caleidoscópios. Tese Doutorado, Vol. I e II, Unesp/ IGCE, Rio Claro, 1999.