Realização SBEM 15 anos SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

A IMPORTÂNCIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO NO ESTUDO DE SISTEMAS DE INEQUAÇÕES.

Armando Traldi Júnior
Faculdades de Guarulhos
traldijr@ig.com.br

Introdução

Já há tempos que os problemas têm ocupado um lugar central para a matemática, visto que há registros de problemas na antiga história egípcia, chinesa e grega, mas foi recentemente que educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia maior atenção.

Na década de 80, o Brasil começa a questionar o período da chamada Matemática Moderna (décadas de 60 e 70) e as discussões a respeito de resoluções de problemas começam a ter destaque e tomam forma com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), tanto do Ensino Fundamental como Médio. Esse documento destaca a importância da resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem de Matemática, observando que "*...é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.*" (PCN-EM, p.251).

Portanto, os PCN tratam a resolução de problemas como eixo organizador do processo de ensino-aprendizagem. Sendo assim, sempre que possível, podemos iniciar o processo de ensino-aprendizagem de um determinado objeto matemático propondo problemas que tenham como uma das soluções a utilização desse objeto como ferramenta, e não iniciar o processo partindo da definição e exemplos. Assim, os conceitos, as idéias e os métodos matemáticos necessitam ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los.

Porém, para Duval (1993), os registros de representação mais complexos são os que têm como ponto de partida o enunciado em língua natural ou texto e, segundo ele, "*os problemas de 'matematização' são aqueles que visam descobrir a aplicação de tratamentos matemáticos já adquiridos a questões imersas em situações quotidianas ...*" *(Duval,1993, p.62).*

Duval propõe que as resoluções desses problemas dependem primeiramente da compreensão do enunciado e da conversão das informações pertinentes.

Buscando alguns problemas adequados para estimular os alunos a utilizarem explicitamente ou implicitamente seus conhecimentos e ampliarem suas habilidades e competências para resolver problemas, me deparei com uma classe de problemas que são relevantes para os dias de hoje. São os problemas de otimização, ou seja, deseja-se maximizar ou minimizar um determinado valor que pode ser o ganho, a perda, o lucro, a diferença, o custo ou outros.

Por exemplo: *Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranja com R$ 20,00 de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos com R$ 10,00 de lucro por caixa e, no máximo, 200 caixas de tangerinas com R$ 30,00 de lucro por caixa. De que forma deverá ele carregar o caminhão para obter o lucro máximo?*

É comum, nos dias de hoje, encontrarmos problemas que tenham que minimizar custos e maximizar lucros nas diversas atividades profissionais e no nosso cotidiano. Muitos desses problemas podem ser classificados como problemas de programação linear e são estudados na disciplina de Pesquisa Operacional nos cursos de Administração, Economia e Computação.

Os conceitos e procedimentos que mobilizamos para resolver alguns dos problemas de programação linear, utilizando a estratégia geométrica e algébrica concomitantemente, são: conversão da língua natural para sentenças matemáticas, dessas para as representações no sistema cartesiano, leitura e interpretação de gráficos, cálculos numéricos e função polinomial do 1º grau.

Por serem problemas que podem ser resolvidos usando como ferramentas conteúdos que fazem parte do ensino fundamental e médio, tenho a seguinte questão: será que os alunos que estão completando o ensino médio resolvem alguns desses problemas de otimização?

Tendo como hipótese de pesquisa que os alunos têm dificuldades em resolver esses problemas de otimização, elaboramos e aplicamos um teste diagnóstico para uma turma do final da 3ª série do ensino médio (turma A), na expectativa de responder a questão. Fundamentei a hipótese na minha prática docente e também nas considerações que Duval faz de que as representações mais complexas são as que têm como ponto de partida o enunciado em língua natural ou textos, e que as atividades de conversão são pouco consideradas no processo ensino-aprendizagem, ocasionando, portanto, dificuldades para os alunos.

Dessa forma, formulamos mais uma questão de pesquisa:

Será que se inserirmos no processo ensino-aprendizagem do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau algumas atividades que focalizem o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação algébrico, gráfico e língua natural, essas atividades proporcionarão aos alunos condições favoráveis para apreensão desse objeto?

Tem-se assim mais uma hipótese: a de que o processo ensino-aprendizagem do objeto sistema de inequações que considera as atividades que permitem o tratamento, conversão e coordenação dos registros de representação podem proporcionar condições favoráveis para apreensão desse objeto e permitir que o aluno utilize esse objeto como ferramenta na resolução de alguns problemas.

Para Duval (1993), a palavra "representação" é bastante usada em matemática e podemos ter uma escrita, uma notação, um símbolo ou mesmo os traçados e as figuras como representantes de objetos matemáticos.

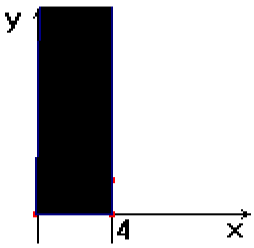
As representações podem ser mentais ou semióticas. "*As representações mentais, ocultam o conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhes está associado".* (Duval, 1993, p.38). Já as representações semióticas "*... são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que têm dificuldades próprias de significância e de funcionamento".* (Duval, 1993, p.39). Ele considera como exemplos de representações semióticas os enunciados em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico, entre outros. Porém, diz que muitos consideram erroneamente que essas representações são apenas exteriorização das representações mentais para permitir a comunicação, mas "*... elas são igualmente essenciais para a atividade cognitiva de pensamento*". (Duval, 1993, p.39).

Entre essas representações existe uma relação: "*não se pode considerar as representações semióticas como simplesmente subordinadas às representações mentais, uma vez que essas últimas dependem de uma interiorização das primeiras e sozinhas as* *representações semióticas permitem certas funções cognitivas essenciais, como a do tratamento*". (Duval, 1993, p.40). Para ele, ainda, não é possível separar os diversos registros de representação da função cognitiva do pensamento humano. Ele chama de "sémiosis" "a apreensão ou a produção de uma representação semiótica" e de "noésis" "apreensão conceitual de um objeto". (Duval, 1993, p.40).

Essas considerações podem ser exemplificadas da seguinte forma: considere um sistema de inequações do 1º grau e seus diferentes registros de representação:

(1) Representação algébrica: $\{(x,y) \in \Re \,/\, 0 \le x \le 4 \text{ e } y \ge 0\}$

(2) Representação geométrica:



(3) Representação pela língua natural: conjunto dos pares ordenados (x,y), sendo que "x" pertence ao intervalo fechado entre zero e quatro, e "y" é um número real maior ou igual a zero.

Portanto, temos um sistema de inequações do 1º grau representado de três maneiras diferentes: algebricamente, por meio de gráfico e em língua natural. O fato de o aluno saber resolver o exercício representado na forma algébrica ou qualquer outra forma isoladamente, ("*sémiosis*"), não garante que ele tenha o conceito do objeto sistema de inequações do 1º grau, ("*noésis*").

Geralmente, os sistemas semióticos têm como primeiro registro de representação a língua natural e, a partir daí, ocorrem uma criação e desenvolvimento de novos sistemas semióticos.

Para Duval, a importância de diversos registros de representação no processo de ensino-aprendizagem está ligada à economia de tratamento que, por meio da mudança desses, fica possível efetuar o tratamento de uma forma mais econômica e rápida, e fazer a complementaridade dos registros de representação, pois, segundo ele, todos os registros de representação são parciais. A coordenação entre esses registros de representação também é importante, visto que a conceitualização implica em uma coordenação de registros de representação. Porém, ela está longe de ser natural, e não parece ser possível de ser realizada no quadro de um ensino que seja principalmente determinado pelos conteúdos conceituais, podendo ser observado que em todos os níveis há uma separação dos registros de representação pelos alunos.

Sendo assim, os alunos não reconhecem o mesmo objeto por meio de diferentes representações que lhes são dadas em diferentes sistemas semióticos. Por exemplo: a escrita algébrica de uma relação e a sua representação gráfica, a escrita numérica de uma relação e sua relação geométrica numa reta ou num plano, o enunciado de uma fórmula em língua natural e sob a forma literal, a descrição de uma situação e sua conversão em uma equação. E essa separação ocorre mesmo após o ensino dos conteúdos matemáticos terem sido feitos usando diferentes registros de representação.

A ausência da coordenação entre os diferentes registros de representação impede a compreensão global do conteúdo e, quando essa compreensão fica restrita, ao contexto semiótico de um único registro de representação, ela não favorece a aprendizagem.

São muitas as explicações que justificam a separação entre os registros de representação, e a que é inerente à essa variedade de registros de representação, é a da "não-congruência": quando há congruência entre os registros, a conversão torna-se trivial e pode ser considerada intuitivamente como um simples processo de codificação, mas, quando não há congruência, a conversão torna-se onerosa em termos de tratamento.

Novamente, ressaltamos, a importância dos problemas de programação linear que são propostos em língua natural, e permitem, além do tratamento de alguns registros de representação, a conversão e coordenação desses. Por exemplo:

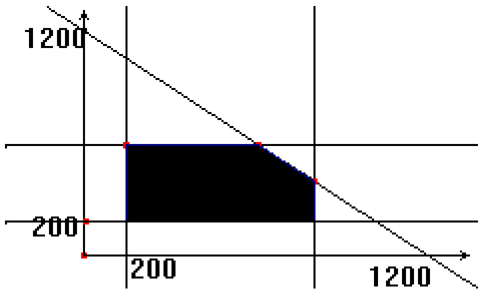
Um determinado laboratório produz dois tipos de medicamentos: tipo A e B. Por mês ele tem garantido a venda de, no mínimo, 200 litros e, no máximo, 900 litros do medicamento A. Em relação ao medicamento B tem garantido a venda de, no mínimo, 200 litros, e, no máximo, 500 litros. A produção máxima por mês do laboratório é de 1.200 litros de medicamento. Temos que a receita, lucro menos despesa, por litro do medicamento **A** é de R$ 400,00 e do B é R$ 800,00. Considerando as condições acima e supondo que o laboratório venda tudo que produzir, responda:(a) Qual deverá ser a produção mensal do laboratório para obter o maior lucro possível?(b) Qual será o lucro do laboratório considerando apenas a venda mínima garantida?

Resolução nossa:

(1) Escrevendo as restrições: (conversão da língua natural para algébrica)

$$\begin{cases} 200 \leq x \leq 900 \\ y \geq 200 \\ y \leq 500 \\ x + y \leq 1.200 \end{cases}$$

(2) Representando em um sistema cartesiano as restrições: (conversão da língua algébrica para o sistema cartesiano)



(3) Encontrando os vértices do polígono: (leitura do gráfico)

A = (200,200); B = (200,500); C = (700,500) e D = (900,300).E=(900,200)

(4) Substituindo na função objetivo: R = 400x + 800y (tratamento de função)

R = 400 x 200 + 800 x 200 = R$ 240.000,00

R = 400 x 200 + 800 x 500 = R$ 480.000,00

R = 400 x 700 + 800 x 500 = R$ 680.000,00

R = 400 x 900 + 800 x 300 = R$ 600.000,00

R = 400 x 900 + 800 x 200 = R$ 520.000,00

(5) Respostas: (interpretação de resultados)

(a) Para obter o maior lucro possível, deverá produzir 700 litros do medicamento A e 500 litros do medicamento B.

(b) Se produzir 200 litros de cada medicamento, atenderá à venda mínima garantida, e terá o lucro de R$ 240.000,00.

Por meio desse exemplo, podemos perceber que alguns problemas que são estudados em programação linear, permitem a exploração de vários conceitos e procedimentos ligados ao sistema de inequações do 1º grau, e ao mesmo tempo permitem diversas atividades de conversão, tratamento e interpretação.

Experiência

Na expectativa de responder a nossa primeira questão de pesquisa elaboramos um teste-diagnóstico que foi aplicado em 33 alunos da 3ª série do ensino médio (turma A) de uma escola pública, que já haviam estudado o conteúdo sistema de inequações do 1º grau. O nosso teste-diagnóstico foi composto de atividades de conversão da língua natural para sentença matemática, por exemplo: " Pensei em um número maior que –7 e menor ou igual a 10". Também solicitamos exercícios de conversão do gráfico para sentença algébrica, resolução de um sistema de inequações apresentado na forma algébrica e um problema de programação linear, com apenas duas variáveis e duas restrições.

Analisando o teste-diagnóstico pudemos observar que, apesar da turma (A) estar no final do ensino médio e ter estudado, recentemente, o conteúdo de sistema de inequações do 1º grau, essa turma tem dificuldades, tais como: - conversão da língua natural para sentença matemática; - conversão de sentenças matemáticas para a sua representação gráfica; - leitura e interpretação de gráficos; - representar graficamente inequações; e - resolução de sistemas de inequações.

A seguir, mostremos algumas questões e erros cometidos por esses alunos no teste diagnóstico:

(1) Foi solicitada, ao aluno, a conversão da língua natural para sentença matemática: Adicionado um número real ao 3, o resultado é maior que o da multiplicação do mesmo número real por 3. Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
9	20	4	33

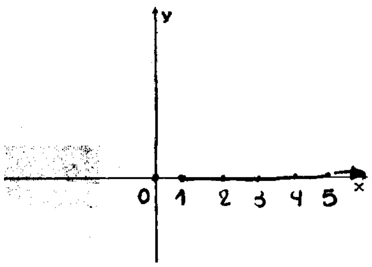
Erros: 01 aluno escreveu: $x + 3 = y. 3 = 0$ (A21); - 01 aluno escreveu: $x + 3 = y$ (A24); 01 aluno escreveu: $x + 3 > 6$ (A05); - 04 alunos escreveram: $x + 3 \geq x.3$; - 02 alunos escreveram: $x + 3 = < x.3$; - 02 alunos escreveram: $x + 3 > 3$; - 02 alunos escreveram: $x + 3 < 3x$; - 01 aluno escreveu: $x + 3 = x.3$; - 01 aluno escreveu: $x + 3 = y . 3$; - 01 aluno escreveu $x + 3 = 2x$; - 01 aluno escreveu: $x + 3 = 10$ $(3 . 3 = 9)$; - 01 aluno escreveu apenas o número 9; e - 02 alunos escreveram expressões aritméticas: $1 \text{ x } 3 = 3$; $7 + 3 = 3$.

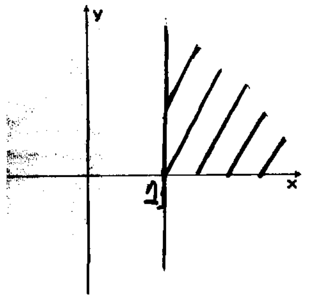
(2) Representação da sentença matemática para a representação gráfica - Considerando o plano cartesiano e o conjunto dos números reais, represente graficamente as seguintes situações: $x \geq 1$

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
4	13	16	33

Alguns dos Erros: - (A20), (A11), (A09), (A23) e (A08) representaram apenas os pontos $x \geq 1$ pertencentes à abscissa e (A12) e (A15) representaram a região que tem abscissa maior que 1 e ordenada maior que zero.





Na questão proposta para resolver o sistema de inequações do 1º grau e o problema de programação linear, pudemos observar que não faz parte das estratégias dos alunos usarem o recurso gráfico na tentativa de resolução. A grande maioria fica na busca de cálculos algébricos e aritméticos usando os dados do problema e as palavras-chave. Podemos apontar como possível motivo para não utilização do recurso gráfico como estratégia de resolução, à prioridade dada pelo sistema de ensino à aritmética e álgebra.

Por meio do teste diagnóstico percebemos que, apesar dos alunos terem algumas noções sobre os conceitos necessários para resolver alguns dos problemas de programação linear, eles não articulam nem disponibilizam esses conhecimentos no momento da abordagem dos problemas.

Na expectativa de observar uma outra turma da 3ª série do ensino médio que estudasse o conceito sistema de inequações com uma abordagem considerando as recomendações de Duval em relação aos registros de representação, elaboramos a seqüência didática que trata das conversões e coordenações dos registros de representação.

A seqüência didática teve como objetivos: propor atividades que poderiam inserir no processo ensino-aprendizagem o objeto sistema de inequações do 1º grau, com as conversões entre os seus registros de representação: língua natural para sentença matemática; sentença matemática para gráficos; gráficos para língua natural; e propor atividades de coordenação entre registros de representação. Iniciamos a seqüência didática propondo dois problemas de programação linear, pois segundo Boavida (1992), um problema pode ter as seguintes perspectivas no processo ensino-aprendizagem, entre outras, como motivação: o objetivo é interessar os alunos pelo ensino de determinados conteúdos matemáticos; como veículo: os problemas constituem um veículo por meio do qual pode ser apreendido um novo conceito ou competência.

Completamos a seqüência com algumas outras atividades e aplicamos o pós-teste, que foi o mesmo que o teste-diagnóstico aplicado na turma (A). Vale ressaltar que a seqüência foi aplicada durante seis sessões de 50 minutos, incluindo o pós-teste.

Grupo pesquisado

Participaram das atividades doze duplas com idades que variavam entre 17 e 23 anos. Esses alunos eram da 3ª série do ensino médio de uma escola pública do estado de São Paulo, consideramos para a nossa análise apenas 5 duplas. O único critério para a seleção foi o fato de que, nas outras duplas, um ou os dois participantes faltaram em uma ou mais sessão. Nenhum dos participantes havia sido reprovado na 2ª ou 3ª séries do ensino médio.

Seqüência-didática

A seguir, mostraremos algumas das atividades da seqüência didática.

Sessão 1: Atividade Introdutória

Objetivo da atividade: observar as estratégias que os alunos irão utilizar para resolver os problemas, quais são as ferramentas que eles têm disponíveis e, a partir dessas observações, introduzir o objeto matemático sistema de inequações do 1º grau.

Iniciamos com um problema de programação linear com apenas duas restrições, e o exercício (2), que apesar de também ser um problema de programação linear, tem mais restrições e portanto pode ser considerado com um grau de dificuldade maior. Solicitamos à professora que após algumas tentativas dos alunos em resolver o exercício (2), ela interferisse com algumas "dicas" para sugerir a resolução por meio de sistemas de inequações do 1º grau.

O nosso interesse em estimular os alunos a resolverem o problema por meio de sistemas de inequações é que, além de introduzir a importância do estudo desse assunto, também segue a recomendação de Duval no sentido de apresentar diversos registros de representação, algébricos e geométricos, concomitantemente e discutir as sua diferenças.

A importância de ter diversas estratégias de resolução, segundo Duval (1988), permite ao aluno escolher estratégias mais “econômicas” em relação ao cálculo, e assim aumentando a possibilidade de acerto. Nesse sentido elaboramos o exercício seguinte, que propicia o trabalho com diferentes registros de representação e diferentes conversões.

Vale ressaltar que, devido ao tempo de cada sessão e ao conteúdo de nosso interesse, escolhemos problemas em que as restrições e a função objetivo podem ser representadas por inequações e equações do 1º grau e a região do gráfico que contém a resposta é limitada. O procedimento de resolução que será focado é o da “regra do polígono”, isto é, um dos vértices do polígono formado pela região limitada é solução do problema.

Exercício (2) Um determinado laboratório produz dois tipos de medicamentos: tipo **A** e **B**. Por mês ele tem garantido a venda de, no mínimo, 200 litros e, no máximo, 900 litros do medicamento **A**. Em relação ao medicamento **B** tem garantido a venda de, no mínimo, 200 litros, e, no máximo, 500 litros. A produção máxima por mês do laboratório é de 1.200 litros de medicamento. Temos que a receita (lucro menos despesa) por litro do medicamento **A** é de R$ 400,00 e do **B** é R$ 800,00. Considerando as condições acima e supondo que o laboratório venda tudo que produzir, responda:

a) Qual deverá ser a produção mensal do laboratório para obter o maior lucro possível?

(b) Qual será o lucro do laboratório considerando apenas a venda mínima garantida?

Comentários sobre a sessão 1

Das oito duplas que estavam presentes, observamos que apenas duas abordaram o problema por meio da estratégia aritmética, mas desistiram antes de completar. As seis duplas restantes começaram a escrever algumas das restrições e esboçar os gráficos, porém não obtiveram sucesso. Após 20 minutos de tentativas e discussões entre os alunos, a professora centralizou a discussão e foi à lousa, buscando sugestões dos alunos, escreveu todas as restrições e esboçou o gráfico.

A maior dúvida dos alunos foi em representar a região ($x + y \leq 1.200$). A professora sugeriu que transformassem em uma equação, representassem a reta da equação e substituíssem pontos de um dos semiplanos para observar se satisfazia a inequação dada. Para atender às recomendações de Duval, sugerimos à professora que enfatizasse as diferenças nos registros de representação gráficas, de acordo com as variações nas expressões algébricas, e também mostrasse os semiplanos a partir de inequações com uma variável ou duas variáveis (reta horizontal ou inclinada), a diferença entre inequações e sistemas de inequações e a representação gráfica entre os números reais (reta) e pares ordenados (plano cartesiano). Nesse mesmo exercício a professora mostrou a regra dos vértices do polígono para encontrar o ponto de máximo ou de mínimo.

Sessões 2 e 3

Essas sessões foram preparadas, pela professora, sem a nossa interferência. Solicitamos a ela que preparasse uma aula de sistema de inequações do 1º grau da sua maneira habitual. A única recomendação que fizemos foi que iniciasse a aula resgatando os problemas da sessão anterior. A professora iniciou a aula resgatando a discussão da aula anterior (exercício 2), e em seguida construiu alguns exemplos de gráficos mostrando quais eram as inequações e equações referentes aos gráficos. Fez alguns exemplos representando graficamente as regiões do plano, e comentou que as regiões estavam sendo dadas na forma de um sistema de inequações do 1º grau. Encerrou o assunto propondo uma lista de exercícios, e solicitou que os alunos resolvessem em casa, pois seria corrigido na aula seguinte.

Sessões 4 e 5: (Atividade Complementar)

A partir de uma observação dos exercícios propostos pela professora na sessão anterior, observamos que não haviam sido discutidas as diferenças entre os registros de representação e as implicações dessas diferenças nas conversões, e também não foram explicitados algumas das variáveis visuais e seus significados simbólicos Assim, elaboramos a atividade complementar, com a finalidade de propor alguns exercícios que permitissem essas discussões que, segundo Duval, são fundamentais no processo de ensino-aprendizagem.

Objetivos:

(1) Propor atividades que permitam ao aluno fazer a conversão do registro de representação proposto em língua natural para sentença matemática, dessa para o gráfico, e do gráfico para sentença matemática;

(2) permitir aos alunos comparar as variações nos registros de representação gráficos de acordo com as variações nos registros de representação algébricos;

(3) propor problemas que permitam a interpretação e a coordenação entre os registros de representação de um sistema de inequações do 1º grau, reconhecer alguns problemas de programação linear e a estratégia geométrica e algébrica, concomitantemente, de resolução de sistemas de inequações do 1º grau.

A atividade complementar é formada por oito exercícios. O exercício (1), por exemplo, propõem a conversão entre o registro de representação da língua natural para a simbólica. Observamos, no teste-diagnóstico e nas atividades iniciais propostas, que as duas turmas têm dificuldades em trabalhar com essas conversões. Duval cita que a atividade de conversão é pouco levada em consideração no processo de ensino-aprendizagem, em vista das atividades de tratamento.

A seguir, algumas atividades das sessões 4 e 5:

Exercício 4:

(a) Represente em um plano cartesiano todos os pontos com abscissa maior ou igual a 4 e ordenada maior ou igual a –3.

(b) Represente em um plano cartesiano a reta cuja equação é x = 4.

O exercício (4) propõe a conversão da língua natural para o registro de representação gráfica. Buscamos nesse exercício considerar a recomendação de Duval que mostra a necessidade de propor diferentes apresentações das atividades relacionadas às representações gráficas, por exemplo, as que permitem uma interpretação global das propriedades das figuras. Essas atividades são as que permitem ao aluno perceber que a modificação da escrita algébrica implica na mudança da representação gráfica.

O exercício (5) solicita ao aluno as conversões da língua natural para o sistema de inequações do 1º grau e desses para o registro de representação gráfica.

Exercício 5: Um determinado posto de gasolina vende apenas gasolina comum e aditivada. Para que no final do dia se tenha lucro, é necessário vender no mínimo 10.000 litros de gasolina comum e 5.000 litros de aditivada.

(a) Considerando que o posto de gasolina venda no mínimo as quantidades para que o posto tenha lucro. Escreva as sentenças matemáticas que representam essas quantidades, formando um sistema de inequações.
(b) Represente o sistema de inequações acima em um mesmo sistema cartesiano.

O exercício (7) busca mostrar em um mesmo sistema de inequações algumas variações. Seguimos a recomendação de Duval de propor atividades que permitam a associação entre as variáveis visuais e suas representações.

Exercício 7: Represente os sistemas de inequações no plano cartesiano e pinte a região que contém os pontos que são a solução do sistema.

(a) $\begin{cases} x + y < 3 \\ x > 0 \\ y > 2 \end{cases}$

Encerramos a atividade propondo o exercício (8), esse é um problema de programação linear, que pode ser resolvido usando o sistema de inequações como ferramenta e permite a variação entre os registros de representação e coordenação deles, recomendada por Duval.

Exercício 8:

Um determinado produto **P** deverá ser composto no mínimo por 7 mg entre as vitaminas **A** e **B**. Sabendo-se que o recomendável é, no mínimo, 4 mg e, no máximo, 8 mg da vitamina A e entre 1 mg e 4 mg da vitamina B, e, que o custo da vitamina **A** é de R$ 3,00 cada miligrama e da **B** R$ 7,50, que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com mínimo custo?

As cinco duplas analisadas por nós abordaram o exercício (8) da forma algébrica e geométrica concomitantemente, e apesar de terem questionado a professora se a função que representava o custo estava certa, e confirmado sobre os pontos que deveriam ser substituídos, obtiveram sucesso na resolução.

Devido ao tempo que foi determinado para o desenvolvimento da seqüência inteira, não esperamos ter esgotado todas as atividades necessárias para uma compreensão global do conceito de construção de gráficos a partir de sistemas de inequações, visto que acreditamos na necessidade de sempre retomarmos os conteúdos matemáticos já estudados em diversos momentos e, por exemplo, não tratamos dos registros de representação em diferentes quadrantes.

Sessão 6: Pós-teste

O Pós-teste foi aplicado em uma única sessão de 60 minutos. Durante o pós-teste os alunos trabalharam individualmente e a professora não tirou dúvidas. Os alunos resolveram como se fosse uma avaliação.

Para identificar os alunos com as duplas, estabelecemos um código para cada aluno. Por exemplo: B11→ o B é devido a ele pertencer à turma B, o primeiro número é a dupla e o segundo número é o elemento da dupla. Então, temos: B11, B12, B21, B22, B31, B32, B41, B42, B51 e B52.

A seguir mostraremos algumas questões do pós-teste:

1ªQuestão: Represente as situações abaixo escrevendo sentenças matemáticas:

Item (a): Pensei em um número, multipliquei-o por 6 e subtraí 72 do resultado. Obtive 66.

Item (b): Adicionando um número real ao 3, o resultado é maior que o da multiplicação do mesmo número real por 3.

Item (c): Pensei em um número maior que –7 e menor ou igual a 10.

Resultado:

Questão 1	Item (a)	Item (b)	Item (c)
Acertou	09	04	03
Errou	01	04	07
Branco	00	02	00

* os alunos que só retiraram os dados da questão foram considerados como em branco.

Item (a) - Observação: - B12 e B22 escreveram a sentença de acordo com a língua natural: x.6 –72 = 66.

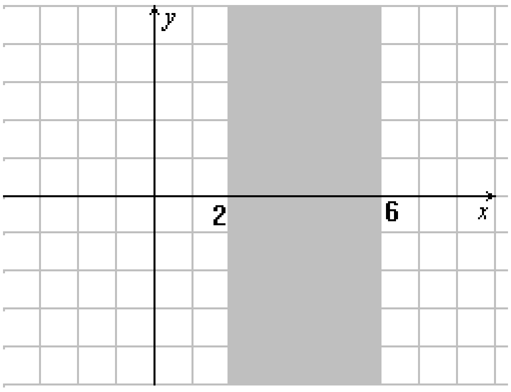
- B11, B21, B31, B32, B42, B51 e B52 escreveram 6x – 72 = 66.

Podemos considerar que os alunos B12 e B22 trataram a questão como se fosse uma codificação, porém, segundo Duval, a conversão não é uma codificação.

Comentários sobre os erros: B41: “6.12 = 72-6 = 66”: o aluno tentou encontrar o número que solucionava o problema e não escrever a sentença como foi solicitado. Além disso, podemos observar o erro de abuso do sinal de igualdade.

Item (b) - Comentários sobre os erros: B21: escreveu x + 3 = 3. Possivelmente o aluno não tenha diferenciado uma equação de uma inequação, também não considerou a multiplicação no segundo membro; B22 escreveu x + 3 < 3x. Errou o sinal de >.

4ª Questão: Considerando a região hachurada no plano cartesiano:
(a) Marque 3 pontos pertencentes a essa região no gráfico e responda:



(b) Escreva 3 pontos que pertençam a essa região ____________________.

(c) Represente algebricamente a região hachurada ____________.

Resultado:

Questão 4	Acertou	Errou	Branco
(a)	10	00	00
(b)	09	00	01
(c)	05	02	03

6ª Questão: Um comerciante vende dois tipos de artigos, **A** e **B**. Na venda do artigo **A**, obtém um lucro de R$ 20,00 por unidade e, na venda do artigo **B**, um lucro de R$ 30,00. Em seu depósito só cabem 100 unidades e sabe-se que, por compromissos já assumidos, ele venderá pelo menos 15 unidades do artigo tipo A e 25 do artigo tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos A e 50 artigos B. Quantos artigos de cada tipo o comerciante deverá encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?

Resultado:

Acertou	Errou	Branco
03	04	03

Observações: - B11, B42 e B52 acertaram o exercício usando a estratégia algébrica e geométrica concomitantemente e a regra do polígono e -B22, B31, B32 e B41 –

escreveram as restrições e representaram no gráfico a região corretamente, porém não fizeram os cálculos para responder o exercício.

7ª Questão: Resolva o sistema de inequações, considerando o conjunto dos números reais como universo:

$$\begin{cases} x - y \geq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
06	03	01	10

Observação: - B11, B31, B32, B41, B42 e B52 acertaram o exercício utilizando a estratégia geométrica para resolver e responder.

Comentários sobre os erros: - B12, B22 e B51 representaram região errada. Vale ressaltar, que mesmo os alunos que erraram, não tentaram resolver algebricamente.

Considerações finais:

Analisamos o teste-diagnótico (turma A) e o pós-teste (turma B) para buscar responder a nossa questão de pesquisa: -Será que se inserirmos no processo ensino-aprendizagem do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau algumas atividades que focalizem o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação algébrico, gráfico e língua natural, essas atividades proporcionarão aos alunos condições favoráveis para a apreensão desse objeto?

Tínhamos como hipótese para a nossa questão de pesquisa que: se fossem propostas no processo ensino-aprendizagem atividades que permitissem o tratamento, a conversão e a coordenação de registros de representação, essas atividades poderiam gerar condições favoráveis para a apreensão desse objeto. Também consideramos a hipótese de que esse objeto pode ser usado pelo aluno como ferramenta na estratégia de resolver alguns problemas.

Após elaboração e desenvolvimento da seqüência didática, aplicamos o pós-teste. Fazendo uma comparação entre os resultados obtidos pela turma (A) no teste-diagnóstico e pela turma (B) no pós-teste, observamos que:

- os alunos que fizeram a seqüência didática, turma (B), tiveram uma atitude diferente frente aos problemas de otimização, pois no pós-teste o índice de questões em branco foi menor;
- percebemos também no pós-teste da turma (B) que apesar de os alunos terem acertado ou não as questões, a maioria demonstrou saber identificar o sistema de inequações em diversos registros de representação e ter noções sobre esse objeto matemático, enquanto que, na turma (A), a maioria não identificou alguns dos registros de representação do sistema de inequações e não mostrou ter noções sobre esse objeto.

Diante de toda a análise feita, consideramos que os alunos avançaram em seus conhecimentos em relação ao sistema de inequações do 1º grau e em suas atitudes, autonomia e habilidade ao resolver problemas de otimização. Em relação ao sistema de inequações do 1º grau, nós percebemos que os alunos evoluíram em seus conhecimentos e demonstraram compreender melhor:

- a identificação,o tratamento e a coordenação dos registros de representação do sistema de inequações;
- a aplicação do sistema de inequações na resolução de problemas;
- a estratégia por meio de gráficos para resolver um sistema de inequações.

Considerando essas evoluções, pudemos concluir que a inserção de atividades que permitam o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação são bastante relevante no processo ensino-aprendizagem.

Também percebemos os problemas de otimização contribuem com o processo ensino-aprendizagem do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau, pois, ao utilizar a estratégia de construção de gráficos para resolvê-lo, o aluno pode observar as diferentes variações das inequações e suas implicações na representação gráfica. Porém, vale ressaltar, que os problemas de programação usados na seqüência-didática estão sendo trabalhados sempre no primeiro quadrante e com coeficientes positivos.

Não podemos, por meio dos resultados e análises feitas, garantir a construção do conceito de sistema de inequações por parte dos alunos que estudaram usando a seqüência-didática, mas sim a evolução de seus conhecimentos e uma maior competência ao utilizá-los na resolução de problemas.

Palavras Chave: Sistema de Inequações, Resolução de Problemas e Registro de Representação.

6- Bibliografia

ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa.** Vol. III. São Paulo: CEMA-PUC, 1997.

BICUDO, M.ªV. (org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo**: UNESP, 1999.

BOAVIDA, A.M. **Resolução de problemas: que rumos para a educação matemática?** In: Educação Matemática. J.P. Pontes (org.). Instituto de Inovação Educacional, pp.115-122, 1992.

DUVAL, R. *Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. Annales de didactique et de sciences cognitives* **5. IREM** de Strasbourg, 1988.

__________ *Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives **5. IREM** de Strasbourg, pp.37-65, 1993.

IGLIORI, S.B.C. A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília: Ministério da ducação/ Secretaria de Educação Média e Tecnológicas,1999.

TRALDI, A. *Sistemas de Inequações do 1º grau: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem usando os registros de representações*. Dissertação de Mestrado, PUC-SP,2002.